Dublet

[illegible] 1729

92

parum R[illegible]publicam: ideò ſtatim Dux Jeremias Wiſniowieccius unà cum Januſio Tyſzkiewic Palatino Kijoviæ graſſantium Coſacorum turmas diſsipare, ac interim præciſâ omni morâ unicuiq; nocivâ, quilibet Palatinatus & Terra militem conſcribere cæpit, ut quantocyus ultrà Leopolim ad condictum apud Oppidum *Glińiany* locum tranſiret, ac inde quò neceſsitas [illegible] *[illegible]cki loc. cit. d. fol.* 508. & 509. Indictum [illegible] [illegible]ni tunc Matthiam Łubieński, Varſaviæ [illegible] [illegible]m in Volum. Leg. ſub Anno ſuprafato 16[illegible] [illegible]ulares Palatinatuum & Terrarum pro die[illegible] [illegible]minati & celebrati ac Confœderationes, [illegible] [illegible]æ, ſubſecutæ.

CONFÆDE[illegible] [illegible]covienſis in Conventu particulari Proſſovi[illegible] 1648. facta & conſcripta, in qua more antiquo reaſſumptæ Confœderationes aliàs *Kaptury*, tuitio Reipublicæ ſub fide, honore & alijs ſponſionibus ibidem expreſsis, tum electio & acceptatio illius tantùm Regis, qui de communi conſenſu omnium ordinum Regni & M.D. Lithuaniæ fuerit electus, promiſſa: contra invaſores Civitatum, Arcium, Bonorum Reipublicæ, Spiritualium & Sæcularium perſonarum, tum contra violatores quarum

JEOMETRYÁ

DLÁ

SZKÓŁ NARODOWYCH

CZĘŚĆ II.

Drugi ráz wydaná.

Bez oprawy Zł: 1. gr. 25.

W KRAKOWIE 1785. Roku

w Drukarni Szkoły Głowney Koronney.

Dziéło: *Jeometryá*, ułożoné przez J. P. Lhuilier Obywatela Genewéńskiégo, w Towarzystwo Nauk w témże Mieście ustanowioné policzonégo, które za ogłoszoném, w Polsce, i obcych kraiach Uczonych do pisaniá wezwaniém, z pomiędzy innych, potwiérdzénié i nagrodę odebrało, od Towarzystwa do Xiąg Eleméntarnych roztrząśnioné, a przez J. X. Gawrońskiégo Kanonika Koadjutora Krakowskiégo, Lektora J. K. Mci i w témże Towarzystwie zasiádaiącégo, na Polski ięzyk z Francuzkiégo przełożoné, Szkołóm Narodowym do użyciá, podług przepisów naszych, podaiémy. w Warszawie dnia 30. Paździérnika Roku 1780.

IGNACY Xżę MASSALSKI Biskup Wiléński, Prezyduiący.
MICHÁŁ Xżę PONIATOWSKI Biskup Płocki.
AUGUST Xżę SUŁKOWSKI Wda Kaliski.
JĘDRZÉY MOKRONOSKI Wda Mazowiecki.
JACEK MAŁACHOWSKI Podkan. Koron.
JOACHIM CHREPTOWICZ Podkan. W. X. Lit.
MICHÁŁ MNISZECH Marszałek Nadwor: W. X.L.
IGNACY POTOCKI Pisárz W. W. X. Lit.
ADÁM Xżę CZARTORYSKI Jen. Ziém Pod.
STANISŁÁW Xżę PONIATOWSKI Jen. Lieut. W. K.
FRANCISZEK BIELIŃSKI Star. Czérski.
ANDRZÉY ZAMOYSKI Kawal. Ord. Orła Biáłégo.

ZBIÓR RZECZY ZAWARTYCH
W ROZDZIAŁACH TÉY CZĘŚCI JEOMETRYI.

ZBIÓR

ZBIÓR SŁÓW POLSKICH,

Albo nowych, albo mniéy znanych, użytych w téy Części Jeometryi, z przydanémi obok słowami łacińskiémi, toż samo w używaniu Matematyków znaczącémi.

Biegón.	*Polus.*
Bryła.	*Solidum.*
Bryłowatość.	*Soliditas.*
Bytność.	*Existentia.*
Ciągło.	*Continue.*
Ciągły.	*Continuus.*
Czworokątny.	*Quadrangularis.*
Czworościán.	*Tetraëdrum.*
Dwódzielny.	*Subduplicatus.*
Dwómnożny.	*Duplicatus.*
Dwómnożyć.	*Duplicare.*
Dwódziestościán.	*Icosaëdrum.*
Dwónastościán.	*Dodecaëdrum.*
Graniastosłup.	*Prisma.*
Jednoimienny.	*Ejusdem nominis.*
Kąt płaski.	*Angulus planus.*
Kąt bryłowy.	*Angulus solidus.*
Kloc.	*Truncus.*
Krawędź.	*Arrête* (po Francuzku.)
Krzywy.	*Curvus.*
Kula.	*Sphaera.*
Kulisty.	*Sphaericus.*
Nadmiár.	*Excessus.*
Odpowiadaiący.	*Correspondens.*
Ośmiościán.	*Octoëdrum.*
Ostrosłup albo Ostrográn.	*Pyramis.*

Ostro-

Ostrokrąg.	*Conus.*
Ostrokrąg ścięty.	*Conus truncatus.*
Płaszczyzna.	*Planum.*
Początkowy.	*Elementaris.*
Półkolé.	*Semicirculus.*
Półkula.	*Hemisphaerium.*
Połączénié.	*Combinatio.*
Przecięcié.	*Sectio.*
Rodzenié się.	*Generatio*
Równik.	*Æquator.*
Równoległoboczny.	*Parallelegrammicus.*
Równoległościán.	*Parallelogrammum.*
Rozległość.	*Extensio.*
Sciana.	*Paries.*
Spodek.	*Pes.*
Stały.	*Constans.*
Sześcián.	*Hexaëdrum* albo *Cubus*
Tróykątny.	*Triangularis.*
Tróymnożny.	*Triplicatus.*
Walec.	*Cylinder.*
Warsta.	*Stratum.*
Wielościán.	*Polyedrum.*
Wyczérpanié.	*Exhaustio.*
Wymiár.	*Dimensio.*
Wyrocznia.	*Oraculum.*

JEOME-

JEOMETRYI
CZĘŚĆ DRUGA
O Bryłach.

W S T Ę P.

W Części pierwszéy saméml tylko zatrudnialiśmy się liniiami i powiérzchniami; lubo iakążkolwiek *rozległość* (extensio) będzie rzeczy iakiéy, nie iest ona ani samą liniią, ani samą powiérzchnią, ale się rozciąga wzdłuż, w szerz i w głąb. I tak, pokóy naprzykład, ma swoię długość, ma fzérokość, i wysokość, czy-

li grubość. Tarcica, choćby náycieńszá, má także długość, szérokość i grubość. Nie byłoby powiérzchni, téy tarcicy, toiest: nie byłoby rozległości iéy, uważanéy co do długości tylko, i szérokości, gdyby nie było tarcicy uważanéy co do wszystkich iéy wymiarów. Powiérzchniá ogranicza rozległość, i onę kończy: aby zaś granica iakiéy rozległości była w saméy rzeczy, trzeba ażeby i ta rozległość była. Nie byłoby więc powiérzchni, gdyby nie było rozległości, którą kończy; tak, iak (mówiąc przez podobieństwo, lubo dalekié,) nie byłoby koloru na przykład w suknie, gdyby nie było sukna.

Podobnym sposobém, lubo często nie uważaliśmy tylko długość iakiéy rozległości, (cośmy nazywali liniią); nié masz iednak téy długości, ieżeli nié masz powiérzchni, którą, ona kończy, lub na któréy może bydź w rzeczy saméy ciągnioną. Nie będzie więc długości, gdy nie będzie powiérzchni: a że nie będzie powiérzchni, ieżeli nie będzie rozległości maiącéy trzy wymiary; więc linii nie będzie, tylko tam, gdzie iest rozległość, z trzéma wymiarami.

Gdy się kto bawi około rozległości, ilé ta trzy wymiary w sobie zamyká, w takim razie mówi się, iż się bawi około *Ciała* (corpus), albo *Bryły* (Solidum.)

Jeometryá nie uważá inaczéy Ciała, tylko ilé to rozciągnioné iest wzdłuż, w szérz, i wzwyż albo w głąb: inszémi zaś własnościami iego wcale się nie zatrudniá, zostawuiąc

ié

ie do uważania Fizykóm. Lubo zaś zdaie się, iż sobie ściśle nader w uważaniu ciała założyli granice Jeometrowie; maią iednak obszérne i tak pole dochodzenia wielu bardzo prawd ukrytych, których wiadomość po większéy części koniecznie iest potrzebna chcącemu w Fizyce postąpić.

Nie sami tylko Jeometrowie, uważaiąc ciała, iednę sobie w nich własność, toiest rozległość za cel wystawuią. Jest to, a przynáymniéy bydź powinien, powszechny postępowania sposób, że gdy kto rzecz iaką z gruntu chce poznać, i poiąć; po części naprzód iéy własności uważa, a dopiero łączy ie razem, i dokładnieyszéy o rzeczy całéy nabywa wiadomości. Rozum ludzki nadto iest ograniczony, aby wiele pospołem nieznanych ieszcze własności mógł dochodzić, a tém bardziey ie ogarnąć.

Skutek takowégo własności rzeczy z osobna dochodzenia, tym większéy iest wagi; im więcéy rzeczóm taż własność służyć będzie: a taką własnością iest rozległość. Cokolwiek pod zmysły nasze podpáda i podpádać może, wszystko to iest rozległym: cokolwiek więc odkryie tym sposobem Jeometra, może to do wszystkich rzeczy przystósować, które tylko pod zmysły nasze podpadaią, lub im poddane bydź mogą. A stąd się okazuie ważność w wynalazkach Jeometrycznych, i obfitość w przystósowaniu onychże.

Lubo, maiąc wzgląd na słabość poięciá ludzkiégo, iednę tylko własność ciała uwáżá Jeometra; dlá większéy iednak wygody i tę ieszcze dzieli nieiako na części, i w myśli ié osobno stawiá, chociaż w rzeczy saméy osobno się nie znáyduią. Nié má względu rolnik na grubość ziémi w tém mieyscu, gdzie rolą swoię uprawiá. Dosyć mu na tém, że ta grubość iest dostateczná do przyięciá ziarna, do dostárczaniá soku i do rozwiniéniá się tegoż ziárna. Wielkość pola znać osobliwiéy stárá się, aby wiedział, ilé na niém ziarna posiać może, a zatém powiérzchnią swégo pola, bez względu na grubość ziémi uważá. Tak i piszący, miarkuie wielkość powiérzchni papiéru, końcém zmieszczéniá na nim tego, co má pisać: nie wchodząc w jego grubość i dosyć maiąc na tém, że mu atrament nie przebiiá.

Jakożkolwiek małá będzie grubość ciała iakiégo; wszelako iednak, ciało to, dwie strony odmiénné, przeciwné sobie mieć musi, i iedna z nich odłączyć się w rzeczy saméy może od drugiéy, luboby nie znalazło się sposobné narzędzié do uczyniéniá tego rozłączéniá. Ciało więc chociaż náycieńszé, nié może bydź za iedno brané, co powiérzchniá: a zatém nie práwdziwie rzecz wykładaią niektórzy Jeometrowie, gdy mowią: że ciało, albo bryła składá się z powiérzchni położonych iednych na drugich; bo iakążkolwiek byłaby liczba tych warst, z których ciało złożoné uważámy, każda iednák w szczególności ta warsta byłaby bryłą, a nie powiérzchnią, ponieważ miałaby dwie strony przeciwné, i mogącé się od siebie odłączyć.

Co

Co się zaś powiedziało o powierzchniach; to i o liniiach twierdzić należy, że nie dla tego są od Jeometrów uważané, iakoby w rzeczy samey znaydowały się, ale tylko dla łatwości i wygody. Nie wiele w to wchodzi podróżny, iak szeroka iest droga, którą ma przebydź, dosyć mu na tém, iż się nią udadź może. Liczba kroków, które ma czynić, nie zawisła od szerokości, ale od samey długości tey drogi; tę przeto długość szczególniey uważa.

Niechby była bardzo mała szerokość powierzchni iakiey, naprzykład Równoległoboku, i niechby ta sama tak mała szerokość podzieloná była na iak naywiecey części, przez liniie równoodległe od długości: wszelako każda z tych części będzie powierzchnią, i chociażby iak naymnieysza była odległość dwóch liniy, które tę szczupłą powierzchnią kończą: za iednę iednak liniią wziąźć ich nie można; a stąd łatwo każdy widzi, iako to wyrażenie iest niedokładne a bardziey ieszcze fałszywe; że powierzchnia składa się z liniy położonych iednych przy drugich.

Na koniec zdarzaią się przypadki, gdzie nie potrzeba nawet uważać przeciągu całey linii, ale koniec iey tylko, ieden lub obadwa, albo zgoła to, co dzieli dwie iey części. W takim razie mówi się, że Jeometra samym się zatrudnia *punktem*. Punktu w samey istocie nie masz, ieżeli nie masz linii, którą punkt kończy, albo iey części, które oddziela. Podróżny cel swoiey drogi, iak punkt iaki sobie wystawia, wielkością iego wcale się nie zaprzątaiąc, aż poki do niego

nie

nie doydzie: doszedłszy, uważá dopiero obszérność mieysca, do którégo dążył. Nié masz wierzchołka kąta, ieżeli nie będzie dwóch liniy tén kąt czyniących. Uwági nad którémi się zastanáwiá Jeometra czyli to, co do położeniá punktów iednych względém drugich, czyli względém linii iakiéy, pochodzą z samégo wystawiéniá sobie w myśli tych rzeczy w jstocie się nie znáyduiących, dlá łatwieyszégo doyściá tego, czego szuká.

Jakożkolwiek mała będzie rozległość względém zmysłów naszych, lub względém wielkości ciał, które nám náyczęściéy pod zmysły podpádaią; wszelako możná oddalić myślą tę małość względém innych większych rzeczy, i uważać ciało choćby téż náymnieyszé, iak gdyby wielkiém bardzo było, a to względém tysiącznéy na przykłád części swoiéy.

Niech będzie iak náymnieyszá liniiá: téy linii koniec iedén, zawsze różnić się będzie od drugiégo. J znowu niechby kto na iak náywięcéy części podzielił iaką liniią każda z tych części dwa końce odmiénné mieć będzie, a stąd poznać możná, iak nie prawdziwé iest to wyrażénié, że liniiá składá się z punktów przy sobie położonych.

Wystawuiąc sobie Jeometra pod témi różnémi postaciami rozległość, uprzedzać tém samém zdaie się té trudności, które często zwykły bywać zarzucané o prawdziwéy *bytności* (existentia) tych rzeczy, które są celém iego nauki.

Po-

Powiérzchnią płaską, iest powiérzchnią, na któréy ku wszystkim stronóm liniie prosté prowadzić można: i takiémi to liniiami i powiérzchniami dotąd zatrudnialiśmy się, których wszystkié części na téyże saméy *Płaszczyznie* zostaią (in eodem Plano). W części następuiącéy takié nadto liniie i powiérzchnie zabáwiać nás będą, któré się na odmiénnych płaszczyznach znáyduią.

Z dwoiakiémi liniiami mieliśmy ieszcze do czynienia: z prostémi i z kołowémi, lub ich częściami. Powiérzchnie także, około których bawiliśmy się, były albo zakończoné liniiami prostémi, albo liniią kołową, albo liniiami prostémi, i częściami liniy kołowych. W części następuiącéy będziémy nadto zabáwiać się różnémi powiérzchniami *krzywémi* (curva), któré wystawić sobie można iak gdyby początek miały z obrotu powiérzchni płaskich, któré iużéśmy roztrząsali. Obaczymy to w szczególności, gdy o każdéy takiéy powiérzchni mowa będzie.

Co się zaś tycze *Brył*; te dwoiakiégo gatunku zabawiać nás będą; iedné, któré są zakończoné powiérzchniami płaskiémi; drugié, któré się kończą powiérzchniami krzywémi albo częścią krzywémi, częścią płaskiémi.

Jeometryá więc, iest to nauka, która się zabawiá samą rozległością.

Liniie prosté dwoiakośmy uwáżali: ráz co do ich wielkości, drugi ráz co do ich położé-

nia

niá iednych względém drugich. W piérwszym względzie przyrównywaliśmy iedné do drugich, albo prosto zaraz, albo przez spólną im miarę, do którèy stósowaliśmy każdą z osobna liniią. W drugim względzie, albo liniie z sobą się spotykały, i ztąd początek kątów, i ich podziałów; albo się też nie spotykały.

Co do powiérzchni, przytoczyliśmy naprzód przypádki, w których dwie figury mogą przystać do siebie. Widzieliśmy, że to przystáwanié zawisło iedynie od wielkości i położéniá liniy iednych względém drugich, toiest, że tylko takié dwie figury przystać mogą do siebie, w których boki iednakowéy są wielkości iedné względém drugich, i iednakowégo położéniá. Jédnym z náyznamienitszych przyſtósowáń było przeniesiénié, czyli przerysowanié iakiéykolwiek figury prostokréślnéy. Widzieliśmy także, iż wielkość figur prostokréślnych nie zawisła od wielkości i położéniá ich boków, gdyż Tróykąty, lub Równoległoboki, byleby iednakowé miały podstawy i wysokości, są równé; równé też będą, tak dwa na przykład Tróykąty, iako i dwa Równoległoboki, gdy ich podstawy będą w stósunku odwrótnym ich wysokości: nad to równość w wielkości figur nie tylko nie zawisła od wielkości i położéniá boków, ale nawet ani od ich liczby: ponieważ Tróykąt, Równoległobok, i Kwadrat może bydź tak zrobiony, że się równać będzie iakiéykolwiek figurze danéy prostokréślnéy; może ieszcze zrównany bydź z summą lub różnicą figur inszych prostokréślnych.

Mo-

Można też przez przybliżénié porównać koło z figurą iaką proſtokréślną, i zrysować takié koło, któréby mało co różniło się od iednéy lub więcéy figur prostokréślnych: dokładnie zaś można mieć koło równé inszému danému, lub wielu inszym kołóm także danym.

Lubo wielkość figury nie iest tém samém wyznaczoná, że wyznaczony iest iéy obwód i położénié boków; podany iednak mieliśmy sposób iedén z naywygodnieyszych, wykreśléniá figury prostokréślnéy o ilukolwiek bokach danych: maiąc dany iéy obwód, widzieliśmy oráz granice, w których przy nie powiększonym obwodzie, powiérzchniá figury bydź może powiększoná, lubo zmnieyszéniá iéy nié má żádnych granic.

Z podobiéńſtwa położéniá liniy, które kończą figurę, i z proporcyonalności tychże liniy wynikało wielé twiérdzéń, a z tych znowu wielé wniosków, i przyſtósowáń. Szczególniéy zaś wynikało, przeniesiénié na papiér, działáń na ziémi częstokroć nierównéy odprawionych; które to przeniesiénié dokładnieyszém i łatwieyszém ieszcze stáwało się, używszy rachunku.

W tém wszyſtkiém, co się dotąd mówiło, nie wspomniało się tylko o linii prostéy, i o linii kołowéy, o powierzchniach płaskich zakończonych przez liniie prosté, albo przez liniie kołowé, lub ich części; o bryłach obwiedzionych powiérzchniami płaskiémi, albo krzywémi, maiącémi swóy początek od powiérzchni płaskich. Ta część Jeometryi, nazywá się

Jeome-

Jeometryą początkową, (Geometria Elementaris): służy ona za fundament koniecznie potrzebny do inszych części zawilszych, z których się składá *Jeometryá wyższá* (Geometria sublimis), a w téy rzecz iest o rozmaitych inszych liniiach krzywych, o powiérzchniach przez nié zakończonych, i o wielu bardzo takich bryłach, których początek czasém možná, a czasém nié možná wyprowadzić z tych ostatnich liniy krzywych, lub z powiérzchni niémi zakończonych.

Różni się téż Jeometryá początkowá od wyższéy, i co do sposobu rysowaniá figur do niéy należących: w Jeometryi albowiém początkowéy, dosyć iest na cyrkłu i linii do wykréśléniá figur iéy właśnych; każdé przeto zagádniénié, któré z pomocą tych dwóch tylko narzędziów może bydź rozwiązané, do niéy należy. Jeżeli zaś zagádniénié, mogąc bydź rozwiązanym, z pomocą saméy linii i cyrkla, toiest przez samé liniie i łuki koła, rozwięzuie się z użyciém inszych ieszcze narzędziów, albo liniy krzywych, odmiénnych od koła; o takowém rozwiązaniu mówić się zwykło, iż nie iest wykonané sposobém zadosyć czyniącym.

ROZDZIAŁ.

ROZDZIÁŁ I.

O położéniu tak Liniy iako i Płaszczyzn iednych względém drugich.

1. *Twiérdz:* 1. Gdy liniiá má dwa swoié punkta, na iednéy płaszczyznie, má ié oráz i wszystkié na téyże płaszczyznie.

Dowodz: Liniiá prostá wyznáczá się przez dwa punkta, a zatém liniiá prostá poprowadzoná przez dwa punkta dané, na danéy także płaszczyznie zniydzie się z każdą inszą prostą, przez też dwa punkta poprowadzoną, i iednę z nią liniią uczyni.

2. *Twiérdz:* Przez liniią prostą i punkt gdziekolwiek dany, może zawsze przechodzić iedná płaszczyzna.

Dowodz: Wystáwmy sobie myślą, iż przez tę liniią przechodzi iakákolwiek płaszczyzna: niecháy ta płaszczyzna obrácá się około téyże linii: w tym obrocie przeydzie przez punkt dany, a w przechodzéniu będzie tą samą płaszczyzną, którey szukámy.

Możná

Możná także i przez dwie linije przecinaiącé się (a) przeprowadzić płaszczyznę: ponieważ płaszczyzna przechodzącá przez iednę z tych liniy i przez którykolwiek punkt drugiéy, przechodzi razém i przez przecięcié tych dwóch liniy, i przez punkt należący do drugiéy linii: a zatém i drugá ta liniiá cała ieſt na téyże płaszczyznie.

Możná nakoniec i przez trzy boki Tróykąta przeprowadzić płaszczyznę. Jakoż płaszczyzna przechodzącá przez dwa boki Tróykąta, przechodzi téż i przez dwa punkta, w których trzeci bok przeciná tamté dwa, a zatém i tén trzeci bok na téyże ieſt płaszczyznie.

3. *Twiérdz*: 3. Gdy się dwie płaszczyzny przecinaią, tém spólném ich przecięciém, iest liniiá prostá.

Dowodz. Weźmy na tém spólném przecięciu dwa iakiékolwiek punkta, i popro-

---

(a) Mówię: *przecinaiącé się*, bo wielé iest liniy, których położénié iest takié, że przez nié nié może razém przechodzić iedna płaszczyzna; na przykład w kostce od graniá, tak iest położoné ramié iedno kąta, na iednéy stronie, i bok przeciwny drugiému ramiéniu tegoż kąta na innéy stronie, że przez té dwie liniie iedna płaszczyzna przechodzić nié może.

poprowádźmy przez nié, na iednéy z dwóch płaszczyznie, liniią prostą: ta liniiá będzie miała na drugiéy płaszczyznie dwa punkta do siebie należące: więc i cała będzie na téyże drugiéy płaszczyznie: a zatém będzie cała na obudwóch płaszczyznach, toiest będzie spolném ich przecięciém.

To, co się o płaszczyznach powiedziało, można porównać z tém, co się linii tycze; toiest, liniiá prostá wyznácza się przez dwa punkta, płaszczyzna wyznácza się przez trzy punkta lub przez dwie linije przecinaiącé się. Gdy znowu dwie linije wzaiém się przecinaią, punkt spólnym ich iest przecięciém: gdy zaś przecinaią się dwie płaszczyzny, spólném ich przecięciém iest liniiá prostá.

4. *Twiérdz.* 4. Gdy liniiá prostá do dwóch inszych, któré się przecinaią na iednéy płaszczyznie, prostopadłą iest w punkcie ich przecięciá; będzie téż prostopadłą i do każdéy inszéy linii, przechodzącéy przez tén punkt na téyże płaszczyznie.

Możná naprzód obiaśnić na karcie przełámanéy. Liniiá prostá, podług któréy karta się przełámała, prostopadłą iest do boków części dwóch, téy karty przełámanéy. Obrácaiąc część iednę złámaną, około złámaniá czyli spólnégo

prze-

przecięciá, bok ieden z dwóch, do którego liniiá przecięciá była prostopadłą, odmieniać będzie położenie; wszelako iednak, na iedney zostanie płaszczyznie, i liniiá przecięciá zawsze do niego będzie prostopadłą. Ten przykład práwdę tę zmysłom dosyć ukazuie, nie dosyć iednak ukazuie ią rozumowi.

Táb. I. Fig: 1. *Dowodz.* Niech będą dwie liniie proste, AB, CD, przecinaiące się w P, i niech do obudwóch prostopadłą będzie liniiá SP. Na płaszczyznie przechodzącey przez te dwie liniie, przeciągnąwszy przez punkt P. iakążkolwiek liniią EF, do tey linii będzie też prostopadłą liniiá SP.

Weźmy liniie równe: PA, PB, i znowu PC, PD, także równe. Poprowádźmy AC, BD spotykaiące liniią EF, w punktach E, i F.

Ponieważ Tróykąty: APC, BPD, maią dwa boki równe iedne względem drugich, i kąty między temi bokami zawarte, także równe: więc mogą przystać do siebie: a w szczególności kąt PAC, równy iest kątowi PBD. Przeto i Tróykąty APE, BPF iako maiące równe boki: PA, PB, i kąty równe iedne względem drugich, mogą też do siebie przystać, a w szczególności, równe są w nich boki PE, PF, i AE, BF.

Po-

Pociągniymy ieszcze liniie SA, SB, SC, SD: Troykąty prostokątne SPA, SPB, maią bok ſpólny SP, i boki PA, PB, równe: a zatém mogą do siebie przystać: a w szczególności liniie SA, SB, są równe. Podobnie równe są i liniie SC, SD. Dwa więc Tróykąty CSA, BSD, których boki wszyſtkie równe są iedne względém drugich, mogą do siebie przystać: a w szczególności kąty SAC, SBD są równe.

Poprowadziwszy SE, SF; Tróykąty: SAE, SBF maią boki SA, AE, równe względém boków SB, BF, i kąty między témi bokami zawarte, równe; więc mogą do siebie przystać: a w szczególności równe są liniie, SE, SF.

Więc w Tróykątach SPE, SPF, równe są boki w jednym, względém boków drugiego a zatém i te przyſtać mogą do siebie: a w szczególności kąt SPE, równá się kątowi SPF; a że są kątami przyległémi, czynią razém dwa kąty proste; każdy z nich przeto będzie kątém proſtym, a zatém liniiá SP, będzie też proſtopadłą i do linii EF.

To Twiérdzénie bardziéy w dowodzéniu długie niż trudne, powinno bydź obiaśnionem przez figurę z papiéru grubszégo, lub z drewna, i z nici; lub w jnszy sposób. Tož rozumieć trzeba i wzglę-

względem wszystkich prawie podań, w tey części zawartych.

5. *Defin:* Gdy liniia prostopadłą iest do wszystkich inszych, które się w punkcie iey spadku przecinaią na płaszczyznie iakiey; o takiey linii mówi się, że iest prostopadłą do tey płaszczyzny; a zatem ieżeli liniia prostopadłą iest do dwóch inszych w punkcie ich przecięciá, na płaszczyznie, ta liniia prostopadłą iest i do tey płaszczyzny.

6. *Twierdz:* 5. *Wzaiemnie*, ieżeli liniiá, prostopadłą iest do trzech inszych liniy, które się w jednym iey punkcie przecinaią; płaszczyzna ta, która przechodzi przez dwie z tych trzech liniy przechodzi też i przez trzecią.

Táb. I. *Fig.* 1. Niech będzie liniiá SP. prostopadłą do linii PB, PD, PF, które przechodzą przez tenże sám punkt P, linii SP.

Niecháy płaszczyzna iaká przechodzi przez liniią SP, i PF. Jakażkolwiek będzie liniiá, w którey ta płaszczyzna, przeciná drugą płaszczyznę przechodzącą przez liniie PB, i PD; wszelako liniiá SP będzie prostopadłą do tego spólnego przecięciá: a zatem gdyby liniiá PF, nie była tem spólnem przecięciem, tedy liniiá SP, byłaby prostopadłą do dwóch liniy leżących na teyże co i

ona

ona płaszczyznie, toiest: byłaby prostopadłą do linii PF, i do drugiéy ieszcze linii różnéy od PF przecinaiącéy spólnie dwie płaszczyzny: co bydź nie może. Liniiá więc PF. nie ieſt różná od spólnégo przecięcia dwóch płaszczyzn SPF, BPD, a zatém ieſt tém spólném przecięciem, i przeto należy i do drugiéy płaszczyzny BPD: toiest, ta płaszczyzna BPD przechodząca przez liniie PB, PD, przechodzi też i przez liniią PF.

7. *Twierdz:* 6. Dwie liniie prostopadłe do iednéy płaszczyzny, są od siebie równoodległé.

Niech będą dwie liniie BA, CD prostopadłé do iednéy płaszczyzny, na którą spádaią w punktach B, i C, té dwie liniie są równoodległé.

Táb. I. *Fig.* 2.

Poprowádźmy liniią BC, a od końca C spólnégo linii BC, z liniią DC, prostopadłą do płaszczyzny, wyciągniymy na téy płaszczyznie prostopadłą CE, do BC, równą iakiéykolwiek długości BA, wziętéy na drugiéy linii prostopadłéy do téyże płaszczyzny. Poprowádźmy ieszcze i liniie BE, AE. Dwa Tróykąty ABC, ECB, maią spólny bok BC, boki także BA, CE, równé, z wykréśleniá, i kąty prosté: ABC, BCE; więc té Tróykąty mogą przystać do siebie, a w szcze-

B gól-

gólności liniie BE, AC, są równé. Dwa tedy Tróykąty ABE, ECA maią względem siebie równé wszystkié boki, a zatém przystać mogą do siebie: a w szczególności równé są kąty ABE, ACE. Że zaś liniiá AB, prostopadłą iest do linii BE, (ponieważ wzięliśmy ią za prostopadłą do płaszczyzny przechodzącéy przez liniie BC, BE); więc kąt ACE, iest téż prosty: a zatém liniiá EC prostopadłá do dwóch liniy CB, CD, z wykréśleniá, iest téż prostopadłą i do linii CA. Przeto ta liniiá CA iest na téy saméy płaszczyznie, co i liniie BC, CD. A że płaszczyzna przechodzącá przez liniie AC, CB, przechodzi téż i przez liniią AB; więc liniie AB, CD, są na iednéy płaszczyznie: będąc zaś na iednéy płaszczyznie, że są prostopadłémi do linii BC; więc od siebie równoodległémi będą.

Przestroga. Aby łatwiéy zrozumieć to dowodzénié, dobrze będzie przegiąć Figurę 2, w linii BC, tak, aby częśc iedna ABCD téy Figury, przypádała prosto nad drugą częścią BEC. Podobnie dopomágać można łatwieyszému wyobrażéniu i w jnszych Figurach, gdzie nie iedna zachodzi płaszczyzna.

Uwága. W piérwszéy części cokolwiek się mówiło o liniiach równoodległych; zawsze to było w tém rozumiéniu, że té liniie kréślone były, na téy sa-

samey płaszczyznie, na którey i każdá insza liniiá łącząca dwa ich punkta, leżała.

8. *Twiérdz:* 7. Jeżeli dwie liniie są od siebie równoodległémi, a iedna z nich prostopadłą iest do iakiey płaszczyzny; będzie i drugá do teyże płaszczyzny prostopadłą.

Weźmy dwie liniie BA, CD za równoodległe: ieżeli iedna z nich n.p. CD, iest prostopadłą do iakiey płaszczyzny; będzie do teyże płaszczyzny prostopadłą i drugá BA.

Táb. I. *Fig.* 2.

Na płaszczyźnie, do którey wzięliśmy za prostopadłą CD, pociągniymy CB: będą do CB, prostopadlémi obiedwie liniie AB, i CD. Na teyże płaszczyznie niech będzie CE prostopadłą do BC, i równą długości BA. Poprowádźmy ieszcze AC, AE, BE. Całe dowodzenie na tém zawisło, aby okázać, że kąt ABE iest prostym, toiest, że liniiá AB prostopadłá do linii BC, iest razém prostopadłą i do linii BE, leżącey na tey samey płaszczyznie, do którey liniiá CD iest prostopadłą.

Dwa Tróykąty prostokątne ABC, ECB, maią ramiona kąta prostego równe iedne względem drugich: a zatém te dwa Tróykąty mogą przystać do siebie,

a w szczególności liniie AC, BE, są równe. Maią tedy dwa Tróykąty ABE, ECA, wszystkie trzy boki równe iedne względem drugich, i mogą zatém przystać do siebie: a w szczególności równe są kąty ABE, ACE. Płaszczyzna przechodząca przez dwie liniie równoodległe AB, CD, przechodzi też tak przez liniią BC, iako i przez AC; więc liniie DC, BC, AC, na iednéy płaszczyznie leżą. A że liniia CE iest prostopadłą do dwóch liniy CD, BC; będzie też prostopadłą i do trzeciéy linii CA, a zatém kąt ACE iest prostym; a że tén kąt, iest równy kątowi ABE, więc i kąt ABE, iest prostym.

9. *Zagádn:* Spuścić prostopadłą do płaszczyzny, z punktu nie na niey danégo.

Táb. I. *Fig. 3.* Niech będzie taki punkt S, z którégo spuścić trzeba prostopadłą na daną płaszczyznę.

Rozwiązanie. Na płaszczyznie danéy nakréślmy iakąkolwiek liniią AB. Niech przez tę liniią i przez punkt dany S, przechodzi insza płaszczyzna, na któréy pociągniymy SD, prostopadłą do AB. Na danéy płaszczyznie niech też będzie poprowadzona DP, prostopadła do AB; a przez liniie SD, DP, niech przechodzi płaszczyzna, na któréy niech będzie SP pro-

prostopadłą do linii DP: ta liniiá SP będzie razém prostopadłą, któréy szukaliśmy.

Wykréślénié służącé do dowodzéniá. Niech przez P, przechodźi liniiá EF, równoodległá od AB.

Dowodz: Liniie SD, PD, z wykréśléniá są prostopadłé do linii AB; więc liniiá DB, wzaiemnie iest do obydwóch tych liniy prostopadłą; a zatém prostopadłą iest i do płaszczyzny przechodzącéy, przez té dwie liniie. A że liniiá EF równoodległą iest od linii AB; więc liniiá EF iest téż prostopadłą do téyże płaszczyzny SDP: a w szczególności prostopadłą iest do linii SP, i liniiá SP, ieſt wzaiémnie do linii EF proſtopadłą. Że zaś liniiá SP zrobioná była proſtopadłą do linii PD; więc liniiá SP ieſt razém proſtopadła do linii EF, i PD, któré się przy iéy spádku P, przecinaią na danéy płaszczyznie: a zatém liniiá SP, proſtopadłą iest do téyże płaszczyzny.

10. *Zagádn:* 2. Od punktu danégo na płaszczyznie wynieść proſtopadłą do téyże płaszczyzny.

Rozwiąz: Spuśćmy do płaszczyzny danéy z punktu iakiégokolwiek nie na niéy będącégo, proſtopadłą, a przez punkt dany poprowádźmy rownoodległą od téyże proſtopadłéy. 11.

11. *Uwága* 1. Od punktu danégo, iednę tylko prowadzić możná prostopadłą, do płaszczyzny.

12. *Uwága* 2. Gdy liniiá iaká nie iest ani na saméy płaszczyznie, ani do niéy prostopadłą; może bydź albo od niéy równoodległą, albo tak, iak zechcémy do niey nachyloną.

Naprzód. Jeżeli, spuściwszy z dwóch punktów linii iakiéy, dwie prostopadłé na płaszczyznę, té prostopadłé będą sobie równé; tedy ta liniiá od którey są spuszczoné, będzie równoodległá od płaszczyzny, na którą ié spuściliśmy, toiest: nie spotká nigdzie téy płaszczyzny, choćby tak liniiá, iako i płaszczyzna náydaléy były przedłużoné.

Táb. I. *Fig.* 3. *Powtóré.* Niech będzie liniiá SD nie prostopadłą do płaszczyzny, ale niech spotyká płaszczyznę w punkcie na przykład D. Z punktu którégokolwiek téy linii n. p. z S, spuśćmy do téy płaszczyzny prostopadłą natráfiaiącą na nię w punkcie P, i poprowádźmy PD. Kąt SDP, nazywá się kątém *pochyłości* (angulus inclinationis) téy linii SD, do płaszczyzny.

Tén kąt iest náymnieyszym z tych wszystkich, które czynić może liniiá SD, z iakąkolwiek inszą liniią poprowadzoną

dzoną na téy płaszczyznie, przez punkt D, i gdyby z punktu P, iako ze śrzodka promieniem równym linii PD, nakréślony był okrąg koła, wszyſtkieby liniie ciągnioné od punktu S, do punktów tego okręgu, czyniły iednakowy zawsze kąt z tą płaszczyzną.

Ponieważ té podaniá są tylko do inszych głównieyszych *pomocniczé* (*subsidiariæ*) i łatwé do dowiedzieniá, przestaie się tu na samém ich wyrażéniu.

13. *Twiérdz*: 8. Gdy dwie liniie równoodległé są od trzeciéy, którá na odmiénney od nich leży płaszczyznie; té dwie liniie i od siebie równoodległé będą.

Niech będą dwie liniie AB, CD, równoodległé od linii EF, będą té dwie liniie od siebie równoodległémi. Od punktu którégokolwiek na linii EF, n. p. G, wyciągniymy dwie do téy linii proſtopadłé: GH GI, na płaszczyznach przechodzących przez tęż liniią EF, i przez AB, i CD. Ponieważ liniiá EF, iest proſtopadłą, tak do linii GH, iako i do linii GI, więc téż będzie prostopadłą do płaszczyzny przechodzącéy przez té dwie liniie. A że znowu dwie liniie AB, CB są równoodległé od linii EF; więc są obiedwie prostopadłé do płaszczyzny przechodzącéy przez liniie GH, GI, a zatém są od siebie równoodległé.

Táb. I. *Fig.* 4.

14.

14. *Twierdz:* 9. Gdy dwie liniie, któré się schodzą, są równoodległé względém dwóch drugich, któré się także schodzą; kąt zawarty między dwiema pierwszémi liniiami, równy będzie kątowi zawartému między dwiéma drugiémi.

Tab. I. *Fig.* 5. Niech będą dwie liniié AB, AC, równoodległé względém dwóch drugich DE, DF; kąt BAC zawarty między dwiéma pierwszémi, równy iest kątowi EDF zawartému między dwiéma drugiémi.

Weźmy równé liniie AB, DE, i równé także liniie AC, DF. Pociągniymy liniie AD, BE, CF, BC, EF.

Ponieważ liniie AB, ED, są równé, i równoodległé, czworokąt ABED będzie oraz Równoległobokiém, i liniie też AD, BE, będą równémi, i równoodległémi.

Podobnie równé są i równoodległé liniie AD, CF; więc liniie BE, CF są też równé, i równoodległé względém linii AD: a zatém równé są sobie, i od siebie równoodległé. Jest tedy Czworokąt BEFC, oraz Równoległobokiém, a w szczególności równé są liniie BC, EF. Przeto Tróykąty BAC, EDF, boki trzy równé maią, iedné względém drugich, a zatém przystąć mogą do siebie, a w szczególności równé są kąty BAC, EDF.

15.

15. *Przystósowanie.* Niech będą dwie płaszczyzny, które się przecinaią. Na każdey z tych płaszczyznie wystáwmy prostopadłą, do spólnego ich przecięciá, wyprowadzoną od punktu któregokolwiek tegoż przecięciá. Kąt zawarty między dwiéma témi prostopadłémi, iednakowy zawsze będzie, chociaż coráz inszy na spólném przecięciu punkt wybiérać będziémy, do wyprowadzéniá z niego tych prostopadłych.

Defin: Jest przeto taki kąt zdatnym do wymierzéniá pochyłości tych dwóch płaszczyzn iedney względém drugiéy. Gdy zatém kąt zawarty między témi dwiéma prostopadłémi, iest prosty, mówi się, że w takim razie *płaszczyzna iedna iest prostopadłą do drugiéy.* Gdyby zaś kąt między témi dwiéma prostopadłémi zawarty, miał: 10°, 20°, 30° i t. d. w tym razie i dwie płaszczyzny zawiérałyby kąty: 10°, 20° 30°, i t. d.

Można ieszcze i w jnszy sposób przeświádczyć się, iako pochyłość dwóch prostopadłych, wyciągnionych na dwóch płaszczyznach, od iednégo punktu linii przecięciá spólnégo tych płaszczyzn, odpowiádá zawsze pochyłości tychże dwóch płaszczyzn. Wystawmy albowiém sobie té dwie płaszczyzny przystaiącé do siebie, i leżącé iedna na drugiéy. Niech potém spodniá płaszczyzna zosta-

stanie na swoiém mieyscu, a wyższá niech się podnosi, i obrácá około spólnégo przecięciá. Spólné przecięcié, pod czas tego obrotu będzie zawsze prostopadłé, do dwóch liniy prostopadłych wyciągnionych na obudwóch płaszczyznach, od iednégo punktu: a zatém té dwie prostopadłé zostaiącé zawsze każda na swoiéy płaszczyznie, odpowiádać będą pod czas tego obrotu, pochyłości dwóch płaszczyzn. Gdy n. p. płaszczyzna ruchomá, obieży połowę drogi, którą iéy obeyśdź trzeba, aby się znalazła na drugiéy stronie, w równi z płaszczyzną ruchomą: w tén czas i prostopadłá do spólnégo przecięciá, znáyduiącá się na płaszczyznie ruchoméy obieży połowę téy drogi, którą má obeyśdź aby się w jednéy równi stykała końcém swoim z drugą liniią prostopadłą, do spólnégo przecięciá wyciągnioną na płaszczyznie nieruchoméy. Toż mówić i o inszych częściach tego obrotu.

16. *Twiérdz*: 10. Gdy iaká prostá liniiá prostopadłą iest do płaszczyzny; do téyże płaszczyzny prostopadłą będzie każdá inszá płaszczyzna przez tę liniią przechodzącá.

Táb. I. *Fig. 6.* Niech będzie liniiá GP, prostopadłą do iakiéy płaszczyzny, i niech przez tę liniią GP, przechodzi inszá iakákolwiek pła-

płaszczyzna; ta prostopadłą będzie do piérwszéy płaszczyzny.

Niech liniiá AB, będzie spólnym tych dwóch płaszczyzn przecięciém; od punktu P, na piérwszéy płaszczyznie wyciągniymy PC, prostopadłą do tego spólnégo przecięciá.

Ponieważ liniią GP, wzięliśmy za proſtopadłą do piérwszéy płaszczyzny; więc GP proſtopadłą będzie tak do linii, AB, iako i do linii PC; bo té dwie liniie przechodzą przez piérwszą płaszczyznę: a zatém od punktu którégokolwiek n. p. P, znáyduiącégo się na spólném przecięciu dwóch tych płaszczyzn, wyciągnąwszy, proſtopadłé PG, PC, do tegoż spólnégo przecięciá, té liniie będą proſtopadłé iedna do drugiéy: a ztąd proſtopadłé będą do siebie i té dwie płaszczyzny.

17. *Wniosek.* Gdy liniiá iaká proſtopadłą ieſt do płaszczyzny, a na téyże płaszczyznie pociągniémy iakąkolwiek inną liniią, i do téy spuścimy drugą proſtopadłą od spodku piérwszéy proſtopadłéy; poprowadziwszy potém od którégokolwiek punktu piérwszéy proſtopadłéy, liniią do punktu, w którym drugá proſtopadłá spotyká liniią pociągnioną na płaszczyznie; ta oſtatniá liniiá poprowadzoná, proſtopadłą będzie do linii na płaszczyznie pociągnionéy. Niech

Táb. I. Fig. 3. Niech będzie SP, prostopadłą do płaszczyzny: pociągniymy na téyże płaszczyznie liniią AB, i spuśćmy do niéy prostopadłą PD od spodku P, linii SP. Poprowadziwszy z punktu któregokolwiek, naprzykład S, linii prostopadłéy SP, liniią SD, do punktu D, w którym prostopadłá PD spotyká liniią AB, ta liniiá SD, będzie prostopadłą do AB.

Przez punkt P, przeciągniymy EF równoodległą od AB.

Ponieważ liniiá SP prostopadłą iest do płaszczyzny danéy, będzie téż prostopadłą i do EF znayduiącéy się na téy płaszczyznie: a wzaiémnie i EF będzie prostopadłą do SP. Taż liniiá EF, iako równoodległá od AB, iest téż prostopadłą do PD, a zatém będąc prostopadłą tak do PD, iako i do PS, będzie także prostopadłą i do płaszczyzny SPD przechodzącéy przez té dwie liniie; więc i AB równoodległá od EF będzie téż prostopadłą do płaszczyzny SPD, a w szczególności będzie prostopadłą do linii SD, znáyduiącéy się na téy płaszczyznie.

18. *Twiérdz:* 11. Gdy płaszczyzna iedna prostopadłą iest do drugiéy, a przez którykolwiek punkt iednéy z tych płaszczyzn pociągniémy prostopadłą do drugiéy, ta prostopadłá, padnie na spólné przecięcie tych dwóch płaszczyzn.

Do-

Dowodz: Gdyby liniiá SP nie pádała na spólne przecięcie dwóch płaszczyzn, tedy spuściwszy z tegoż samego punktu S, prostopadłą, do spólnego przecięciá, ta byłaby oraz prostopadłą i do drugiey płaszczyzny: a zatem dwie proſtopadłe z jednego punktu spuszczone byłyby na iednę płaszczyznę, co bydź nie może.

19. *Twierdz:* 12. Gdy dwie płaszczyzny, które się przecinaią proſtopadłe są do trzeciey, spólne przecięcie tychże dwóch płaszczyzn, proſtopadłe też będzie do teyże trzeciey płaszczyzny.

Dowodz: Od punktu, w którym liniiá przecięciá dwóch pierwszych płaszczyzn, spotyká trzecią płaszczyznę; pociągnąwszy tak na iedney iak i na drugiey z dwóch pierwszych płaszczyzn proſtopadłe do dwóch liniy spólnego ich przecięciá z trzecią płaszczyzną, te dwie proſtopadłe, proſtopadłemi też będą do trzeciey płaszczyzny: a zatem gdyby te dwie proſtopadłe nie zeszły się w jednę, i nie były w rzeczy samey iedną liniią, która iest spólnem przecięciem dwóch pierwſzych płaszczyzn; tedy od iednego punktu možnaby do iedney płaszczyzny dwie proſtopadłe wyprowadzić: to zaś bydź nie może.

20. *Twierdz:* 13. Gdy iedna liniiá proſtopadłą ieſt do dwóch płaszczyzn, te dwie

dwie płaszczyzny nigdzie się z sobą nie zeydą, choćby naydaley były przedłużone.

Dowod: Gdyby te dwie płaszczyzny mogły się spotkać z sobą, tedy Tróykąt zrobiony z tey prostopadłey i z dwóch liniy poprowadzonych od punktu iakiegokolwiek na spólnem przecięciu dwóch tych płaszczyzn, do punktów, w których prostopadłą spotyka też płaszczyzny, miałby dwa kąty proste: co bydź nie może.

Defin: Dwie płaszczyzny, które nawet przedłużone spotkać się z sobą nie mogą, nazywaią się *równoodległemi.*

21. *Twierdz:* 14. Gdy dwie liniie są równoodległe względem dwóch drugich, płaszczyzna przechodząca przez dwie pierwsze liniie, będzie równoodległa od płaszczyzny przechodzącey przez dwie drugie liniie.

Táb. I. *Fig.* 7. Niech będą dwie liniie AB, AC równoodległe względem dwóch drugich DE, DF; płaszczyzna przechodząca przez liniie AB, AC, równoodległa będzie od płaszczyzny przechodzącey przez liniie DE, DF.

Z wierzchołku A, kąta zawartego między dwiema pierwszemi liniiami spuśćmy prostopadłą AG do płaszczyzny przechodzącey przez drugie dwie liniie, i od

od spodku G, téy prostopadłéy poprowádźmy na téyże saméy płaszczyznie liniie GH, GI, równoodległé względém liniy DE, DF.

Liniá AG, prostopadłá do drugiéy płaszczyzny, iest téż prostopadłą, i do liniy GH, GI: a że liniie AC, GI, są obiedwie równoodległé od linii DF; więc i od siebie są równoodległémi: a zatém liniiá AG, iest także prostopadłą do linii AC. Tymże sposoběm pokázać można, że liniiá AG, iest téż prostopadłą i do linii AB. Więc ta liniiá AG, iest prostopadłą do płaszczyzny przechodzącéy, przez liniie AB, AC: a zatém i dwie płaszczyzny przechodzącé iedna przez liniie AB, AC, drugá przez liniie DE, DF, są obiedwie prostopadłé do téyże saméy linii AG, a przeto są od siebie równoodległé.

22. *Twiérdz:* 15. Gdy dwie płaszczyzny równoodległé od siebie przeciná trzeciá płaszczyzna, ich spólné przecięciá z trzecią płaszczyzną, będą téż od siebie równoodległé.

Dowodz: Gdyby té spólné przecięciá, z trzecią płaszczyzną spotkały się gdźie z sobą, tedy punkt przecięciá tych dwóch przecięć, należąc tak do iednego iak i do drugiégo spólnégo przecięciá dwóch płaszczyzn z trzecią, należałby

téż

też tak do iedney, iak i do drugiey z dwóch płaszczyzn przecinaiących trzecią: a zatem dwie płaszczyzny spotkałyby się gdzie z sobą, toieſt, nie byłyby iak są równoodległe.

23. *Twierdz:* 16. Gdy dwie płaszczyzny są od siebie równoodległe; liniiá która iest proſtopadłą do iedney, z tych płaszczyzn, będzie prostopadłą i do drugiey.

Táb. I. *Fig.* 7. Niech będą dwie płaszczyzny równoodległe: BAC, EDF; i liniiá AG proſtopadłá do iedney z tych płaszczyzn n.p. do pierwszey; taż liniiá proſtopadłą będzie i do drugiey płaszczyzny.

Jeżeli liniiá AG, nie ieſt proſtopadłą do któreykolwiek linii, takiey iak GH, przeciągnioney przez spodek G, teyże linii AG, który ieſt na płaszczyznie EDF; tedy przeciągnąwszy przez liniie GH, AG, płaszczyznę, któráby przecięła płaszczyznę BAC, w linii AB; liniia AG będzie proſtopadłą do linii AB: więc liniie AB, GH, z których iedna ieſt, a drugá nie ieſt proſtopadłą do linii AG, leżącey na teyże samey, co one, płaszczyznie, spotkać się mogą z sobą: a przeto i płaszczyzny, na których leżą spotkać się też z sobą mogą, i nie będą równoodległe: co ieſt przeciwko warunkowi.

24. *Twierdz:* 17. Gdy dwie liniie leżące albo nie leżące ną iedney płaszczyznie, przecięte są przez trzy równoodległe od siebie płaszczyzny, te liniie będą od tych płaszczyzn przecięte proporcyonalnie.

Niech będą dwie linjie AB, CD, leżące, albo nie, na iedney płaszczyznie: niech trzy płaszczyzny rownoodległe przecinaią pierwszą liniią w punktach, B, F, A, a drugą w punktach C, G, D; będzie, BF: AF = CG: DG.

Tab. I. *Fig.* 8.

Poprowádźmy liniią BD, spotykaiącą płaszczyznę śrzednią w punkcie E.

Linie EF, AD, są spólnemi przecięciami płaszczyzny BAD, z dwiema płaszczyznami równoodległemi; więc te dwie linie są od siebie równoodległe: a zatem podobne są Tróykąty: BFE, BAD; przeto, BF: AF = BE: ED.

Dlá teyże przyczyny podobne będą i Tróykąty: BDC, EDG, a zatem BE: ED = CG: GD. Więc też będzie, BF: AF = CG: GD.

Uwága. W tym razie tylko liniie BC, AD są równoodległe, i oráz liniie FE, EG, iednę czynią liniią, gdy liniie AB, CD na teyże samey płaszczyznie znáyduią się.

C ROZ-

ROZDZIAŁ II.

O Kątach Bryłowych.

Defin: Wykreślmy iakikolwiek Wielokąt na płaszczyznie: od każdego wierzchołka kąta w tym Wielokącie wyciągniymy liniie do iednego punktu, nie na tey płaszczyznie będącego. Przy tym punkcie tyle się zrobi kątów przez nachylenie iedney płaszczyzny do drugiey, ile Wielokąt naprzód wykreślony, miał boków. Summa tych wszyſtkich *kątow*, nazywa się *kątem Bryłowym* (angulus solidus). Punkt, który ieſt spólnym wierzchołkiem wszyſtkich kątów z nachylenia tych płaszczyzn pochodzących, nazywa się: *wierzchołkiem* kąta bryłowego. Płaszczyzny schodzące się w tym wierzchołku nazwać można *ścianami* (paries albo facies:) a zaś spólne tych płaszczyzn przecięcia *krawędziami* (po Francuzku *Arrêtes.*)

Przeſtroga. W tem wszyſtkiem, co się tu o kątach bryłowych powie, wyſtawiać sobie trzeba nie insze Wielokąty, iak tylko te, których boki schodząc się w jch wierzchołkach, same kąty wyskakuiące tam czynią (b).

Trzy

(b) Obacz o inszych kątach bryłowych, Rozprawę P. Bermanna, pod tytułem *De angulis solidis Dissertatio Vittembergae 1764.*

Trzy rzeczy uważać można w kącie bryłowym: ściany albo kąty płaskie, które go tworzą, pochyłości wzaiemne tych ścian, i stósunek placu zawartego między temi ścianami, do placu całego, około wierzchołka kąta bryłowego; w podobny prawie sposób, iak też uważaliśmy wielkość kąta płaskiego, względem całego placu, około wierzchołka tegoż kąta, na iedney z tym placem płaszczyznie znáyduiącego się. (*Sphœra*). Jako Wielokąt, w którego wierzchołkach kończą się krawędzie kąta bryłowego, może bydź na Tróykąty podzielony przez przekątne ciągnione od iednego z wierzchołków iego; tak też i kąt bryłowy iakikolwiek, podzielić można na insze kąty bryłowe, złożone z trzech tylko kątów płaskich. Przeto i Jeometrowie náywięcey się bawią około kątów bryłowych, trzema kątami Płaskiemi określonych, aby doszli pochyłości ścian, lub ich wielkości: a potem wiadome maiąc dostatecznie te pochyłości i wielkości ścian, wyznáczaią kąt bryłowy, który się z tych ścian układá. Część ta Jeometryi, w którey o kątach bryłowych rzecz iest, pod tą, pod którą ie wystawuiemy postacią, nazywá się Trygonometryą *kulną*, albo sferyczną. (Trigonometria sphærica). Jest ona koniecznie potrzebná Astronomóm, a często kroć i w Jeometryi praktyczney, wziętey w całey swoiey obszerności. Na daniu pierwszych o niey początków, tu

C2 prze-

przeſtaniémy, i nie więcéy mówić będziémy o kątach bryłowych, tylko tylé, ilé wiedzieć potrzeba będzie dlá zrozuméniá podáń ściągaiących się do samychże brył.

25. *Twiérdz*: 1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaſkich, summa dwóch z tych trzech kątów, większá iest od kąta trzeciégo.

Táb. II. *Fig.* 1.

Dowodz: Niech będzie kąt bryłowy w A zrobiony z trzech kątów płaſkich: BAC, BAD, CAD; którykolwiek z tych trzech kątów wzięty, mnieyszy ieſt od summy dwóch inszych.

Jeżeli té trzy kąty są wszyſtkié równé, iuż oczywiście dwa, większé są od iednégo.

Jeżeli zaś kąt iedén n.p. BAC, większy ieſt tak od kąta BAD, iak i od kąta CAD; tedy wszelako mnieyszy będzie od summy obudwóch.

Zróbmy albowiém na płaszczyznie BAC, kąt BAE równy kątowi n.p. BAD, i weźmy dwie długości równé AD, AE; na linii także AB, weźmy punkt którykolwiek, n.p. B; przez trzy punkta: B, D, E, niech przechodzi płaszczyzna przecinaiącá krawędź AC w punkcie C.

Dwa

Dwa Tróykąty: BAD, BAE, maią bok spólny AB, boki: AD, AE, równé, i kąty między témi bokami zawarté, równé; więc té Tróykąty mogą przyftać do siebie, a w szczególności, linije: BD, BE, są równé. A że w Tróykącie, BDC, summa boków: BD, CD większá ieft od trzeciégo boku: BC, więc bok DC, większy ieft od linii CE: a zatém Tróykąty: CAD, CAE maią bok spólny AC, boki: AD, AE, równé; podftawa zaś DC, iednego większá ieft od podftawy CE, drugiégo: więc kat: CAD, w wiérzchołku piérwszégo Tróykąta, większy ieft od kąta: CAE, w wiérzchołku drugiégo; więc i summa kątów: BAD, CAD, większá ieft od summy kątów: BAE, CAE, toieft: większá od kąta BAC.

26. *Twiérdz:* 2. W kącie bryłowym, summa wszyftkich kątów płaskich, mnieyszá ieft od summy cztérech kątów proftych. (c) *Do-*

(c) Trzeba mieć na pamięci, że się tu mówi tylko o kątach bryłowych, których krawędzie wspiéraią się na wiérzchołkach Wielokąta, maiącégo samé tylko kąty wyskakuiącé. W przypadku od tego odmiénnym, mogą bydź kąty bryłowé takié, w których summa kątów płaskich, będzie większá od 4. kątów prostych tylé, ilé zechcémy. P. Le Sage Genewczyk piérwszy tę prawdę odkrył, którá téż piérwszá i sama iedna zdaie się uchybiénié zadáwać Euklidesowi. Obácz Historyą Akademii Nauk Paryzkiéy na Rok 1756.

Dowodz: Wierzchołki Wielokąta, na których wspieraią się wszystkie krawędzie kąta bryłowego, są oráz wierzchołkami tylu inszych kątów bryłowych zrobionych przez kąty trzy płaskie, ile ten Wielokąt ma wierzchółków: gdyż każde dwa z tych kątów płaskich wchodzących w kąt ieden bryłowy, znayduią się przy podstawach ścián tego kąta bryłowego, a trzeci takowy kąt należy do podstawy kąta bryłowego w wierzchołku, toiest: do Wielokąta, na którym się wszystkie krawędzie kąta bryłowego w wierzchołku wspieraią.

Na każdey z tych ścián summa trzech kątów, iednego w wierzchołku, a dwóch przy podstawie ściany, równá się summie dwoch kątów prostych: a zatem summa wszystkich kątów w wierzchołku i wszystkich kątów przy podstawach ścián, równać się będzie, dwóm kątóm prostym tyle razy wziętym, ile má ścián kąt bryłowy.

Summa dwóch kątów przy podstawach ścián, większá iest od kąta trzeciego przy podstawie kąta bryłowego, który kąt trzeci, z dwoma tamtemi robi kąt ieden bryłowy przy tey podstawie: a zatem summa wszystkich kątów przy podstawach ścián wszystkich, większá iest od summy wszystkich kątów przy podstawie kąta bryłowego.

Więc

Więc summie wszystkich kątów, przy podstawach ścian, mniey nie dostaie do summy dwa razy tylu kątów prostych, ile Wielokąt, czyli podstawa kąta bryłowego, ma boków; niżeli summie wszystkich kątów Wielokąta tego nie dostaie do teyże summy dwa razy tylu kątów prostych, ile ten Wielokąt ma boków.

A że summie kątów wszystkich Wielokąta do przerzeczoney summy, brakuie 4. kątów prostych; więc summie kątów wszystkich przy podstawach ścian, brakować będzie do teyże summy mniey niż 4. kąty proste. Że zaś summa wszystkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, spełnia ten niedostatek mnieyszy od 4. kątów prostych; więc summa wszystkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, mnieysza iest od 4. kątów prostych.

To Twierdzenie obiaśnić trzeba przez wiele przykładów szczególnych, biorąc różne liczby ścian kąta bryłowego n.p. 3, 4, 5, 6, i t.d. w których to razach, takoważ liczba 3, 4, 5, 6, i t.d. będzie wyrażać boki Wielokąta służącego kątowi bryłowemu za podstawę; summa zaś kątów Wielokąta będzie ważyć: 2, 4, 6, 8, i t.d. kątów prostych; a zatem summa kątów przy podstawach ścian będzie ważyć więcey niż 2, 4, 6, 8. i t. d. kątów

tów prostych. Że zaś summa tych ostatnich kątów wráz z summą kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, waży w tychże razach, kątów prostych 6, 8, 10, 12; więc summa kątów samych przy tym wierzchołku mnieyszá ieft, niż *nadmiár* (excessus) liczb.

6, 8, 10, 12, i t. d.

nad liczby - - 2, 4, 6, 8, i t. d.

Toieft: ta summa kątów przy wierzchołku mnieyszá ieft od 4. kątów prostych.

Można práwdę tego twierdzéniá okázać i w sposób następuiący:

Obierzmy punkt iakikolwiek, w pośrzód Wielokąta, i pociągniymy od niego liniie do wszystkich wierzchołków tego Wielokąta. Summa wszystkich kątów, około tego punktu, zrówna summę 4. kątów prostych. Wynieśmy teráz myślą ten punkt nad płaszczyznę Wielokąta, podług ciągu linii prostopadłey do tey płaszczyzny. Jm bardziey ten punkt oddalony będzie od wierzchołków Wielokąta: tym bardziey zmnieyszy się każdy kąt przy tym punkcie, zawarty między liniiami, od niego poprowadzonemi do wierzchołków Wielokąta: a zatem tem mnieyszá będzie summa wszystkich kątów przy tym punkcie, od summy pierwszey 4. kątów prostych.

27.

27. *Przystosowanie.* Pięciorakie tylko iest *Połączenie* (Combinatio) kątów należących do Wielokątów foremnych, z których może się złożyć kąt bryłowy.

1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów Tróykąta równobocznego, każdy taki kąt ważyłby $\frac{2}{3}$ kąta prostego, a zatem summa ich ważyłaby 2, kąty proste.

2. W kącie bryłowym, złożonym ze czterech kątów Tróykata równobocznego, summa takich kątów, ważyłaby $2\frac{2}{3}$ kąty proste.

3. W kącie bryłowym, złożonym z piąciu kątów Tróykąta równobocznego summa takich kątów ważyłaby $3\frac{1}{3}$ kąty proste.

Sześć kątów Tróykąta równobocznego, waży kątów prostych cztery. Są one zdatne do napełnienia placu, około punktu iakiego na płaszczyznie, nie zaś do zrobienia kąta bryłowego. Summa więcey niż sześciu takowych kątów, ważyłaby też więcey niż cztery kąty proste.

4. W kącie bryłowym złożonym ze trzech kątów kwadratu, każdy takowy kąt byłby kątem prostym: a zatem summa

ma takowych kątów równałaby się summie 3 kątów prostych: summa 4 kątów kwadratu, byłaby summą 4 kątów prostych; a przeto z 4 takowych kątów skłądać się nie może kąt bryłowy, daleko zaś bardziey skłądać się nie może z większéy liczby takich kątów.

5. W kącie bryłowym, złożonym ze trzech kątów, Pięciokąta forémnégo, każdy takowy kąt ważyłby $1\frac{1}{5}$ kąt prosty: a zatém summa ich ważyłaby $3\frac{3}{5}$ kąty proste.

Summa czterech takowych kątów, a tém bardziéy więcéy niż czterech, ważyłaby więcéy niż cztéry kąty prosté.

Summa trzech kątów Sześciokąta forémnégo waży cztéry kąty proste, a zatém żadén kąt bryłowy nie złoży się z samych kątów Sześciokąta forémnégo: tém bardziéy zaś żadén kąk bryłowy skłądać się nie może z samych kątów należących do Wielokątów forémnych, któré więcéy niż sześć boków maią.

Jeżeli tedy znáyduią się bryły iakié, których ścianami są Wielokąty iednakowégo tylko gatunku; takich brył gatunków, więcéy iak pięć bydź nie może.

Bryła, któréy każdy kąt bryłowy złożony iest z trzech kątów Tróykąta równobocznégo, má 4. ściany, z których

każdá

każdá ieſt Tróykątém równobocznym, i 4 kąty bryłowé. Nazywá się *Czworościanêm* (Tetraedrum).

Bryła, którey każdy kąt złożony ieſt z 4. kątów Tróykąta równobocznégo, má ścián 8, z których każdá ieſt Tróykątém równobocznym, i 6. kątów bryłowych. Nazywá się *Ośmiościanêm* (Octoedrum.)

Bryła, którey każdy kąt złożony ieſt z 5 kątów Tróykąta równobocznégo, ma 20. ścián, z których każdá iest Tróykątém równobocznym, i 12, kątów bryłowych. Nazywá się *Dwudzieſtościanêm* (Jcosaedrum.)

Bryła, którey każdy kąt złożony ieſt z 3 kątów kwadratu, má 6 ścián, z których każdá ieſt kwadratém, i 8 kątów bryłowych. Nazywá się *Sześcianêm* (Hexaedrum,) a zwyczayniéy (*Cubus.*)

Bryła, którey każdy kąt złożony ieſt z 3 kątów Pięciokąta forémnégo, má 12 ścián, z których każdá iest Pięciokątém forémnym, i 20 kątów bryłowych. Nazywá się *Dwunastościanêm* (Dodecaedrum.)

Dosyć będzie pokázać ucznióm takié bryły, nie wchodząc w obszérné w téy mierze rozwodzéniá się, które więcéy

samey

samey ciekawości dogádzaią niż pożytek przynoszą. Te bryły, gdy wszyftkie kąty maią równe i wszystkie ściany foremne, i mogące przystać iedne do drugich, nazywaią się bryłami *foremnemi.*

Gdybyśmy w kącie bryłowym pomieszać chcieli różne kąty Wielokątów foremnych, końcem złożeniá tegoż kąta bryłowego, liczba takich kątów płaskich, mogłaby bydź do upodobaniá powiększoná.

28. *Twierdz.* 3. Gdy dwa kąty bryłowe złożone są z trzech kątów płaskich, równych iednych, względem drugich; pochyłości ścián, tychże kątów bryłowych równe też są iedne względem drugich.

Táb. II. *Fig.* 2.

Niech będą dwa kąty bryłowe: ABCD, abcd złożone z równych kątów względem siebie: BAD, bad, BAC, bac, DAC, dac; pochyłości płaszczyzn równe też będą iedne względem drugich: np. pochyłość płaszczyzny BAD do BAC, równá iest pochyłości płaszczyzny bad, do bac.

Wykreśl: Weźmy równe liniie AB, ab, na płaszczyznach: BAD, bad: wynieśmy do AB prostopadłą BD, á do ab, proftopadłą bd. Na płaszczyznach także BAC, bac, wyprowádźmy do tychże

linii

linii AB, ab, prostopadłe: BC, bc. Kąty CBD, cbd, będą kątami pochyłości płaszczyzn BAD, BAC, i bad, bac; a zatém dowieśdź należy, że té kąty: CBD, cbd, są równé.

Dowodz: Dwa Tróykąty DBA, dba są proſtokątné w B i b; maią równé kąty BAD, bad, i boki: AB, ab, równé; więc mogą przyſtać do siebie: a w szczególności, liniie: BD, bd są równé, iako też i liniie AD, ad.

Dlá téyże przyczyny i Tróykąty BAC, bac przystać do siebie mogą a w szczególności liniie BC, bc, są równé iako też i liniie AC, ac.

Więc Tróykąty CAD, cad, maią boki AC, ac równé; i boki AD, ad, także równé, a maiąc oprócz tego i kąty między témi bokami zawarté, równé, przystać do siebie mogą: w szczególności zaś liniie CD, cd, są równé.

Więc Tróykąty: CBD, cbd, maią wszystkié boki równé iedné względém drugich, a zatém do siebie przystać mogą: a w szczególności kąty: CBD, cbd, są równé.

29. *Twiérdz:* 4. Gdy dwa kąty bryłowé, ſkładaią się z trzech kątów płaſkich, któré równé są iedné względém drugich;

ta-

takié kąty bryłowé, mogą przystać do siebie.

Niech będzie kąt bryłowy w A, złożony z trzech kątów płaſkich: BAD, BAC, DAC, równych względém kątów płaskich: bad, bac, dac, z których się ſkłádá kąt drugi bryłowy w *a*: té dwa kąty bryłowé, mogą przystać do siebie.

Wystáwmy sobie w myśli drugi z tych kątów, iakoby przeniesiony, tak; aby wiérzchołek a, przypádł na wiérzchołek A, liniiá zaś ab, aby leżała na linii AB. Pónieważ kąty: BAD, bad, wzięté są za równé; liniiá więc ad, będzie téż leżeć na linii AD.

A że trzy kąty płaſkié w *a*, równé są trzém kątóm w A; równé więc będą pochyłości płaszczyzn BAD, BAC, i płaszczyzn bad, bac: a zatém płaszczyzna bac, leżeć będzie na płaszczyznie BAC. Dlá równości zaś kątów bac, BAC, liniiá ac leżeć będzie na linii AC; więc tak liniiá ad, leży na linii AD, iak i ac na AC: a zatém płaszczyzna cad przystanie do płaszczyzny CAD: przystaną tedy do siebie té dwa kąty bryłowé.

30. *Wniosek.* Kąt bryłowy, okréślony trzéma kątami płaſkiémi, iuż tém samém iest wyznaczony, gdy mámy wiadomé té trzy kąty płaſkié.

Możná-

Możnáby téż pokázać, że z trzech kątów płaſkich czyniących kąt bryłowy maiąc wiadomé dwa z tych kąty, i pochyłość ich ścián, wyznácza się także kąt bryłowy; iako téż z wiadoméy tylko pochyłości wszyſtkich trzech ścián tego kąta.

Té iednak oſtatnié podaniá, iż nie służą do naszégo zamiérzéniá; przeto dosyć iest tu o nich tylko namiénić.

31. *Zagádn:* 1. Zrobić kąt bryłowy, maiąc dané trzy kąty płaſkie, z których może bydź złożony ténże kąt bryłowy.

Do ſkładu tego kąta bryłowégo z 3 kątów płaſkich; naſtępuiący sposób, zdaie się bydź náywygodnieyszym.

Niech będą dané trzy kąty płaſkié: BAD, BAC, DAC, do zrobiéniá kąta bryłowégo. Wyſtáwmy sobie myślą, iż tén kąt iuż ieſt zrobiony. Weźmy ktorykolwiek punkt C, na krawędzi n. p. AC; i od tego punktu, spuśćmy na insze krawędzie, AB, AD, liniie proſtopadłé: CB, CD: a znowu od punktów B, i D, na płaszczyznie BAD, poprowádźmy do téyże krawędzi, proſtopadłé: BE, DE, które się przetną, w punkcie E. Pociągniymy na koniec liniie: CE, AE.

Tab. II. *Fig.* 3.

Po-

Ponieważ liniie CB, EB, są prostopadłe do linii AB, liniia więc AB iest prostopadła do płaszczyzny: CBE; a zatém płaszczyzną BAD, która przechodzi przez liniią AB, iest też prostopadłą do płaszczyzny: CBE; a wzaiémnie, i ta płaszczyzna iest do tamtéy prostopadłą. Dla téyże przyczyny, płaszczyzna, CDE, prostopadłą iest do płaszczyzny BAD; więc obiedwie płaszczyzny: CBE, CDE, prostopadłe są do płaszczyzny B A D: a zatém spólné ich przecięcie CE, iest także prostopadłém, do płaszczyzny BAD: i płaszczyzna CAE, iest także prostopadłą do téyże płaszczyzny BAD. Skąd wypada takowé wykréślénié.

Po obudwóch stronach linii ac, przy punkcie *a*, nakréślmy kąty: cab, cad, równé względém kątów danych CAB, CAD. Od punktu któregokolwiek téyże linii ac, n.p. od *c* spuśćmy na dwa drugié ramiona, ab, ad, liniie prostopadłé: cb, cd; a na ramionach trzeciégo kąta weźmy, zacząwszy od wiérzchołka A, liniie AB, AD, równé względém liniy ab, ad. Od punktów B, i D wyprowadźmy prostopadłé do liniy AB, AD, przecinaiącé się w punkcie E, a od tego punktu wynieśmy znowu prostopadłą EC, do płaszczyzny BAD. Niech przez liniie EC, i AE przechodzi insza płaszczyzna, na któréy z punktu A, iak ze śrzodka, promieniém równym odległości ac,

na-

nakréślmy łuk koła, który przetnie profstopadłą EC, w punkcie C; naoftatek przez punkt C, i linii AB, AD, niech przechodzą dwie płaszczyzny té, wráz z płaszczyzną BAD, zrobią kąt bryłowy, którégo szukámy.

Jnaczéy ieszcze punkt C, będzie wyznaczony na profstopadłe, EC; gdy tylą linią, EC, weźmiémy, aby kwadrat iéy równáł się różnicy kwadratów: linii ae, i AE, albo różnicy kwadratów: cd, i DE, albo nakoniec różnicy kwadratów: bc i BE.

32. *Uwaga.* Używaiąc tego wykréślénia, można łatwo dowieśdź następuiącé Twiérdzénié, na którém się zasádzá Trygonometryá kulná, toieft, że:

W każdym kącie bryłowym zrobionym ze trzech kątów płafkich, wftawa iednégo kąta płafkiégo, ieft do wftawy drugiégo, iak wftawa kąta pochyłości przeciwnégo piérwszému kątowi, do wftawy kąta pochyłości przeciwnégo drugiému kątowi: toieft, iak wftawa kąta pochyłości płaszczyzn dwóch ścián pod piérwszym kątém będących, do wftawy kąta pochyłości dwóch także ścián pod drugim kątém będących.

Jakoż linii: CD, CB, są wftawami, piérwszá kąta CAD, drugá, kąta CAB,

 wzią-

wziąwszy za promień liniią AC; a zatém té dwie liniie tak się do siebie maią, iak wstawy tych dwóch kątów.

A że w Tróykącie ECD prostokątnym w E; CD: CE = Pr: Wst. CDE.

A w Tróyk. EBC; CE: CB = Wst: CBE: Pr:

Więc złożywszy té stósunki, będzie; CD: CB = Wst: CBE: Wst. CDE.

Toiest: Wstawa kąta CAD, tak się má do wstawy kąta CAB, iak wstawa kąta pochyłości dwóch płaszczyzn BAD, BAC, do wstawy kąta pochyłości dwóch płaszczyzn BAD, CAD.

33. *Zagádn*: 2. Maiąc dané trzy kąty płaskié, z których się má składać kąt bryłowy, wyrachować, iaká má bydź pochyłość płaszczyzn, aby tén kąt zrobiły.

Táb. II. *Fig. 3.*

Sposób 1. W Czworokącie ABED, kąty przeciwné B, i D są prosté: więc Czworokąt tén może bydź w koło wpisanym, a zatém kąty (w tymże samym odcinku) ADB, AEB będą równé. Wyrachowáwszy tedy w Tróykącie BAD kąt ADB, iuż tém samém znáydziémy i kąt AEB, równy tamtému.

Stósunek boku BC do BE, toiest stósunek

sunek wstawy całéy, czyli promienia, do Dostawy kąta pochyłości CBE, składá się z stósunków boków: BC do AB i AB do BE.

A że iest; BC:AB=Stycz. BAC: Wst: całéy,
i - AB:BE=Wst.całá: Dostycz. AEB
więc; BC:BE=Stycz. BAC: Dost. AEB
A zatém; - - - -
Dost: AEB=Pr:Dost: CBE. Stycz. BAC:

Sposób 2. Wyciągnąwszy od punktu iednégo n p. B znáyduiącégo się na któréykolwiek krawędzi kąta bryłowégo, prostopadłé: BD, BC, do téy krawędzi, a na dwóch płaszczyznach, których spólném przecięciém iest ta krawędź, niech té dwie prostopadłé spotykaią dwie drugie krawędzie w punktach: C, i D: Liniie BC, BD będą stycznémi, a liniie AC, AD będą siecznémi względém kątów, BAC, BAD, biorąc za promień linią AB. Więc té liniie, mogą bydź wyrachowané na miarę linii stałéy AB, czyli promienia. W Tróykącie CAD wiedząc dwa boki AC, AD i kąt CAD, między niémi zawarty możémy wyznaczyć bok trzeci CD. W Tróykącie zatém CBD wiedzieć będziémy trzy boki, a stąd możémy wyznaczyć kąt CBD, który iest kątem pochyłości dwóch płaszczyzn: BAD, BAC. Jnszé też kąty pochyłości łatwo wyznaczymy podług uwagi poprzedzaiącéy. (32)

PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIÁŁÓW NASTĘPUIĄCYCH

O podniesiéniu liczby do iéy Sześcianu albo Kubusa, *i o wyciągniéniu Piérwiástku Sześciénnégo, albo Kubicznégo.*

Przed następuiącémi *Rozdziáłami*, kłádzie się nauka o podniesiéniu liczby do Sześcianu, i o wyciąganiu Piérwiástku sześciénnégo: bo właśnie w tych rozdziáłach, można będzie naukę tę do praktyki zaráz przystósować.

34. Sześcián liczby iakiéy robi się, gdy tę liczbę przez nię samę ráz mnożymy, i tak rozmnożoną, ieszcze ráz przez nię mnożymy: albo, co na iedno wychodzi, gdy tę liczbę mnożymy przez iey kwadrat. I tak Sześciany dziewięciu liczb pierwszych.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
są: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Sześciany liczb:

10. 20. 30, 40, - - - 90.
są; 1 000, 8 000, 27 000, 64 000, - - - 729 000.

Sześciany liczb:

100, 200, 300, - - - 900.
są: 1 000 000, 8 000 000, 27 000 000, 729 000 000.

35.

35. Sześciany więc liczb maiących iednę tylko cyfrę, a resztę zerów, są té samé, co i sześciany tychże cyfr samych przez się, przydáwszy im trzy razy tylé zerów, ilé ich było w liczbie z któréy się Sześcián robi.

Wyráz tén *Sześcián*, wzięty iest z Jeometryi, w któréy, aby mieć bryłowatość iakiégo Sześcianu; rozmnáżá się liczba wyrážaiąca wielkość boku iego, ráz i drugi przez siebie.

Sześcián każdéy liczby znaléźć można, mnożąc iéy kwadrat przez nię samę; podámy tu iednak inszy ſposób zrobiénia Sześcianu z liczby danéy, a tén sposób pomoże nám do przeciwnégo działániá, toieſt do wyciąganiá Piérwiástku Sześciénnégo z liczby iakiéykolwiek.

36. Sześcián liczby, złożony ze dwóch części, może bydź rozłożony na cztéry części następuiącé.

1. Na Sześcián piérwszéy części.

2. Na Kwadrat piérwszéy części trzy razy wzięty i rozmnożony przez część drugą.

3. Na Kwadrat drugiéy części trzy razy wzięty, i rozmnożony przez część piérwszą.

4.

4. Na Sześcián drugiéy części.

I tak liczbę 5. rozłożywszy na dwie części na przyk: 1, i 4; można uważać iéy Sześcián, iakoby złożony z czterech części: 1, 12, 48, 64, których Summa iest: 125. Gdybyśmy zaś tę samę liczbę 5. uważali iako złożoną z dwóch części 2, i 3; iéy Sześcián mógłby się był rozłożyć na cztéry części: 8, 36, 54, 27.

Niechby potrzeba znaléźć Sześcián liczby n p. 47; Ponieważ iey kwadrat (podług reguły iuż nám wiadoméy) ſkłádá się z kwadratu piérwszéy części 40, z téyże części 40, dwa razy wziętéy, przez drugą, 7. rozmnożonéy, i z kwadratu drugiéy części 7; mnożąc cały tén kwadrat ieszcze ráz przez 40, i przez 7, albo przez 47, Sześcián z 47 ſkłádać się będzie:

Z Kwadratu liczby 40, rozmnożonégo przez 7, z 40, rozmnożonych przez kwadrat liczby 7, dwa razy wzięty, i z Sześcianu téyże liczby 7; (biorąc 7 za liczbę mnożącą:) biorąc znowu 40, za liczbę mnożącą; Sześcián z 47, ſkłádać się ieszcze będzie z Sześcianu liczby 40; z 7, rozmnożonych przez kwadrat liczby 40, dwa razy wzięty, i z 40 rozmnożonych przez Kwadrat liczby 7, raz wzięty: a razém to wszystko zebráwszy, ſkłádać się będzie z Sześcianu

liczby

liczby 40, z kwadratu téyże liczby trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 7 z kwadratu liczby 7, trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 40, i z Sześcianu liczby 7. Co uczyni Summę 103 823, która iest Sześcianem liczby 47.

Ponieważ zaś nie można ieszcze do wieśdź tego Algiebraicznie; trzeba przynáymniey będzie z Jeometryi zaciągnąć obiaśnienia, pokazuiąc: że Sześcian linii złożoney ze dwóch części, może bydź w rzeczy saméy rozłożony na Sześciany każdéy z tych dwóch części, i na 6. Równoległościanów: z których trzy mieć będą za podstawę kwadrat iednéy części, a za wysokość część drugą: trzy zaś insze, mieć będą za podstawę kwadrat drugiéy części, a za wysokość część pierwszą.

Wykonać to w skutku będzie można na Sześcianie z drewna lub z papieru tak zrobionym, aby té części od siebie się oddzielały.

38. Náywygodniéy ieſt, rozłożyć liczbę na iedności, dziesiątki, ſta, i t.d. które w sobie zawierá.

Niech będzie liczba n. p. 12. Podzielmy ią na dwie części, 10, i 2. Sześcian iéy ſkładać się będzie z części naſtępuiących;

1 000.

1 000. Sześcián dziesiątku

600. Kwadrat dziesiątku trzy razy wzięty przez iedności rozmnożony.

120. Kwadrat iedności trzy razy wzięty przez dziesiątek rozmnożony.

8. Sześcián dwóch iedności.

1 728. Sześcián z 12.

Niech będzie liczba 84, rozebraná na dwie części 80, i 4; Sześcián iéy mieć będzie części następuiące:

512 000. Sześcián dziesiątków,

76 800. Kwadrat dziesiątków trzy razy wzięty, przez iedności rozmnożony.

3 840. Kwadrat tychże iedności trzy razy wzięty przez dziesiątki rozmnożony.

64. Sześcián z iedności.

592 704. Sześcián z 84.

Niech będzie liczba 324, rozebraná na dwie części 320 i 4; aby zaś mieć Sześcián piérwszéy części, rozłożmy ią na części 300, i 20.

27 000 000.	Sześcián ſtów.
5 400 000.	Kwadrat ſtów potróyny przez dziesiątki rozmnożony.
360 000.	Kwadrat dziesiątków potróyny przez ſta rozmnożony.
8 000.	Sześcián dziesiątków.
1 228 800.	Kwadrat z 320 potróyny rozmnożony przez iedności.
15 360.	Kwadrat z jedności potróyny, rozmnożony przez 320.
64.	Sześcián iedności.
34 012 224.	Sześcián z 324.

Niechby trzeba zrobić Sześcián z 8421.

512 000 000 000	Sześcián z 8000.
76 800 000 000	Kwadrat z 8000. potróyny, roz: przez 400.
3 840 000 000	Kwadrat z 400. potróyny, roz: przez 8000.

64.

64 000 000.	Sześcián z 400.
4 233 600 000.	Kwadrat z 8400. potróyny, roz: przez 20.
10 080 000.	Kwadrat z 20. potróyny, rozm: przez 8400.
8 000.	Sześcián z 20.
212 689 200.	Kwadrat z 8420. potróyny, roz: przez 1.
25 260.	Kwadrat z 1. potróyny, rozm: przez 8420.
1.	Sześcián z 1.
597 160 402 461.	Sześcián z 8421.

39. Widzimy na poprzedzaiących przykładach, iż przez takowy rozbiór, każdá część następuiącá Sześcianu mniey má iednem zerem, od części, która ią poprzedziła: i że iako pierwszá część Sześcianu iest zawsze Sześcianem, a po nim następuią dwie części, każdá złożoná z potróynego kwadratu iedney części rozmnożonego przez część drugą; tak i daley, tymże porządkiem idą, i dalsze wyrazy części składaiących Sześcián.

40.

40. Możná było opuścić zera kładąc tylko samé cyfry znaczącé, a w każdéy części następuiącéy występuiąc z ostatnią cyfrą w prawą. I tak części Sześcianu z 324 mogły bydź w tén sposób wypisané.

```
  27
   54
    36
      8
12288
   1536
       64.
----------
34012 224.
```

41. Tén sposób postępowaniá, pokazuie nám, że liczba wyrażaiacá Sześcián iedności, kończy się na ostatniéy po prawéy ręce cyfrze, że Sześcián dziesiątków kończy się na czwartéy od prawéy ręki cyfrze; liczba Sześcianu stów, kończy się na siódméy cyfrze od téyże strony rachuiąc, i t. d.

Żeby więc wiedzieć liczbę cyfr wyrażaiących Pierwiástek Sześcianu danego, trzeba od prawéy strony zaczynaiąc, oddziały co trzy cyfry kréskami poczynić: a ilé będzie tych oddziáłów, tylé też cyfr będzie się znáydowało w Piérwiástku. Oddział piérwszy po lewéy stronie

nié może mieć trzy, dwie, a czasém i iednę tylko cyfrę, iako to przykłady poprzedzaiącé okázuią. I tak Piérwiástki sześciénné liczb 1, 331; 32, 767; 226, 981; maią dwie cyfry.

42. Niechby trzéba z liczby 1331, wyciągnąć piérwiástek sześciénny.

Ta liczba má dwie cyfry w swoim Piérwiástku, bo dwa w niéy uczynić możná oddziáły, tym sposobém: 1,331. Naywiększá liczba dziesiątków tego Piérwiástku taká bydź powinná, aby iéy Sześcián nie był większy od 1: a zatém będzie tylko iedén dziesiątek w Piérwiástku. Sześcián z 10, iest: 1 000; któ-ry Sześcián odiąwszy od 1 331, zostanie 331. Ta reszta powinná zamykać w sobie potróyny kwadrat dziesiątka rozmnożony przez iedności: potróyny kwadrat tych iedności, rozmnożony przez dziesiątek, i Sześcián tychże iedności. A że w szczególności ta reszta, má w sobie zamykać kwadrat potróyny dziesiątka, rozmnożony przez iedności; wystáwmy więc sobie tę resztę 331, iak gdyby zamykała tylko sám potróyny kwadrat z 10, toiest 300. Wieloráz z 331, przez 300 podzielonych, iest: 1; więc iedna iedność będzie w Piérwiástku. Rozmnożywszy 300 przez 1, będzie 300, a té, od 331, odiąwszy, zostanie 31. Ta reszta má ieszcze w sobie zamy-

zamykać potróyny kwadrat iedności przez dziesiątek rozmnożony, toiest: 30; i Sześcian iedności, toiest: 1, a ze wszystkiém 31, które odiąwszy od ostatniéy reszty nic nie zostanie: a zatém Pierwiástek sześciénny liczby 1331, iest: 11.

Wyciągniymy Piérwiástek sześciénny z liczby 68,921. Piérwiástek téy liczby má dwie cyfry. Liczba dziesiątków taká bydź powinná, ąby Sześcián iéy odiąć można od piérwszégo podziału: 68. A że z Táblicy dziewiąciu piérwszych sześcianów (34) którą uczniowie umieć na pamięć powinni, Sześcián náybliższy 68, iest 64. a tego Piérwiástek iest: 4; więc w Piérwiástku będą 4 dziesiątki. Sześcián z 40, iest: 64000; odiąwszy go od 68921, zostanie 4921, Ta reszta má w szczególności zawiérać w sobie potróyny kwadrat dziesiątków, rozmnożony przez iedności, toiest má w sobie zawiérać 4800 rozmnożoné przez iedności. Dzieląc 4921. przez 4800, wypádá 1, na wieloráz; więc będzie w Piérwiástku iedna iedność. Odiąwszy od 4921, kwadrat potróyny 4800. rozmnożony przez 1, zostanie 121. Ta reszta má ieszcże w sobie zawiérać kwadrat potróyny iedności, rozmnożony przez 4 dziesiątki, toiest 120, i Sześcián iedności, toiest 1, a ze wszystkiém, 121; które odiąwszy od ostatniéy reszty, nic nie zostanie: a zatém Piérwiástek zupełny będzie: 41. Wy-

Wyciągniymy Piérwiástek sześciénny z liczby 884, 636. Ta też liczba ma dwie cyfry w swoim Piérwiástku. Sześcián náybliższy liczby 884. iest: 729, którégo Piérwiástkiém iest: 9; więc Piérwiástek będzie miał 9 dziesiątków. Sześcián z 90, iest 729 000, który odiąwszy od 884 736, zostanie 155 736. Kwadrat z 90, iest 8 100, potróyny będzie: 24 300. Dzieląc przez 24 300, resztę 155 736, na wieloráz wypáda 6; więc Piérwiástek mieć będzie 6. iedności. Rozmnożywszy 24 300 przez 6, będzie 145 800, które odiąwszy od 155 736, zostanie 9 936. Kwadrat potróyny 6 iedności, rozmnożony przez 9 dziesiątków, będzie 9 720, odiąwszy go od 9 936, zostanie 216, nakoniec Sześcian z 6, iest 216: a zatém Piérwiástek zupełny będzie 96. Jakoż Sześcián z 96, iest: 884, 736.

Wyciągniymy Piérwiástek sześciénny z liczby 590, 589, 719. Tén powinien mieć trzy cyfry.

Liczba stów w Piérwiástku taká bydź powinná, aby iéy Sześcián, nie przechodził 590. Z dziewiąciu piérwszych Sześcianów, náybliższy liczby 590 iest Sześcián: 512, którégo Piérwiástek iest 8; a zatém 8 stów będzie w Piérwiástku. Odiąwszy 512 000 000, od Sześcianu danégo, zostanie 78 589 719. Kwadrat

drat potróyny stów 8, albo 800, toiest 1 920 000 znáyduie się razy 40 w téy reszcie: mogłoby więc zdáwać się, iż 4 dziesiątki Piérwiástek mieć powinien; aleby nié można od 78 589 719 odiąć dwóch inszych części, toiest kwadratu potroynégo dziesiątków rozmnożonégo przez sta, i Sześcianu dziesiątków: nié można przeto więcéy dadź Piérwiástkowi, iak 3 dziesiątki. Liczbę 1 920 000, rozmnożoną przez 30, toiest 57 600 000, odiąwszy od 78 589 719, zostanie 20 989 719: od téy reszty odiąwszy znowu kwadrat potróyny 3 dziesiątków, przez sta rozmnożonych, toiest 2 160 000, zostaie 18 829 719 a po odięciu Sześcianu dziesiątków, toiest 27 000, będzie w reszcie, 18 802 719. Kwadrat potróyny części Piérwiástku znalezionéy, toiest liczby 830, iest 2 066 700; przez tén dzieląc resztę 18 802 719, wypadnie 9 iedności na wieloráz. Odiąwszy od téy reszty, liczbę 2 066 700, rozmnożoną przez 9, toiest: 18 600 300, zostanie 202 419: skąd znowu odiąwszy kwadrat potróyny iedności 9, rozmnożony przez 830, toiest 201 690, zostaie 729. Naostatek Sześcián z 9 iest: 729, a zatém Piérwiástek, którégo szukaliśmy, będzie 839.

Wzór

Wzór działań w przykładach poprzedzaiących.

Przykład 1.	*Przykład* 2.
1,331,|10.	68,921|40
1 000|	64 000|
300 | 331|1.	4800| 4 921 |1.
| 300|	| 4 800 |
31.	121.
30	120
1.	1
1	1
0	0

Przy

Przykład 3.

```
      884,736. | 90
      729 000  |
24300 | 155 736 | 6.
      | 145 800 |
        9 936.
        9 720.
          216.
          216.
            0.
```

Przykład 4.

```
          590,589,719, | 800
          512 000 000  |
1 920 000 | 78 589 719 | 30.
          | 57 600 000 |
            20 989 719.
             2 160 000.
            18 829 719.
                27 000
2 666 700 | 18 802 719 | 9
          | 18 600 300 |
               202 419
               201 690
                   729
                   729
                     0.
```

Więcey takowych przykładów należy podadź Uczniom, nie używaiąc ieszcze żadnego ſkróceniá.

45. Pierwsze ſkrócenie, na tem zawisło, aby opuszczać zera, w liczbach

 dzie-

dzielących, podzielnych, i w wielorazach; maiąc iednak zawsze uwagę na mieysca, które zastępować przypada cyfróm znaczącym. W szczególności zaś co do wielorazów, będzie tén z opuszczania zerów pożytek, że zaraz przy sobie kłaśdź będzie można cyfry wyrażaiące pierwiastek, którego szukamy.

Drugié skrócénié, związané z piérwszém na tém się zasadzá, aby do káżdégo następuiącégo dzieléniá, tylé tylko cyfr z Sześcianu przyłączać do reszty pozostałéy; ilé ich wyciągać będzie przypadaiącé odeymowanié: darémna albowiém byłaby prácá, przy każdém odeymowaniu, wszystkié pozostałé Sześcianu cyfry na nowo wypisywać, ponieważ ostatnié zwłaszcza cyfry przez większą część działaniá nienaruszoné zostaią.

Trzecié skrócénié na tém zawisło, aby za iednym razém odiąc kwadrat potróyny częśći znalezionéy, rozmnożony przez część następuiącą; kwadrat potróyny téyże części drugiéy, rozmnożony przez część piérwszą znalezioną, i Sześcián téy części drugiéy. To zaś wykoná się, dodaiąc razém té trzy liczby odeymować się maiącé, i tak dodané odeymuiąc od Sześcianu, z którégo Piérwiastek wyciągámy. Zawsze iednak miéć trzeba na to uwágę, aby w liczbach, które piérwéy dodáwać, a potém ich sum-

summę odeymowáć mámy, zachowane było mieysce każdey cyfrze właściwe; iako też wzgląd mieć należy na położenie cyfrów tych, od których insze odeymowáć przypádá.

Przystósowanie. Niechby z liczby 257, 259, 456, trzeba wyciągać Pierwiástek Sześcienny. Ten będzie miał cyfr trzy; náywiększy Sześcián zawarty w 257, iest 216, którego Pierwiástek iest: 6, odiąwszy ten Sześcián od 257, zostanie 41. Do tey reszty przyłączmy następuiący oddział 259, będzie 41 259. Nie maiąc tym czasem względu na ostatnie dwie cyfry: 59, dzielmy 412 przez potróyny kwadrat z 6, toiest przez 108, wieloraz będzie 3. Weźmy teráz summę trzech liczb: 324
162. toiest kwadratu potróynego z 6.
27 stów rozmnożonego przez 3 dziesiątki, kwadratu potróynego z 3 dziesiątków rozmnożonego przez 6, stów; i Sześcianu z 3. dziesiątków. Summę 34 047 odeymiymy od 41 259, zostanie 7 212; przy których przypisawszy ostatni oddział 456, będzie 7 212 456. Nie uważaiąc tym czasem na ostatnie dwie cyfry, dzielmy 72 124 przez kwadrat potróyny z części Pierwiástku znalezioney, toiest przez 11 907, wypadnie 6, na wieloráz. Weźmy summę trzech liczb:
71442
6804 toiest kwadrat potróyny części
216 pierwey znalezioney, rozmnożony przez 6 iedności, kwadrat potróyny z 6: ie-

dności rozmnożony przez część piérwéy znalezioną, i Sześcián z 6. iedności. Summa 7 212 456. równá się reszcie ostatniéy: co znakiém iest, że Piérwiástek, którego szukaliśmy, áni mnieyszy áni większy iest, iak 636. (d)

44. Aby wyciągnąć Piérwiástek Sześciénny z ułomku, którego tak licznik, iako i mianownik iest Sześcianém; trzeba go osobno wyciągać z każdégo z tych wyrazów. I tak Piérwiástek sześciénny z $\frac{125}{216}$, iest $\frac{5}{6}$. Piérwiástek z $\frac{64}{343}$. iest $\frac{4}{7}$. Aby zaś wyciągnąć Piérwiástek Sześciénny z liczby mieszanéy; trzeba ią piérwéy zamiénić na ułomek. I tak Piérwiástki sześciénné liczb mieszanych $3\frac{3}{8}$, $37\frac{1}{27}$, są té samé co i ułomków $\frac{27}{8}$, $\frac{1000}{27}$. toiest: $\frac{3}{2}$. $\frac{10}{3}$, albo $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$.

45. Co się o Piérwiástku kwadratowym powiedziało (w Części 1. Geom: § 128) ściągá się i do Piérwiástku sześciénnégo: toiest, że ieżeli nié można mieć Piér-

---

(d) To działanié bardziéy długié, niż trudné, wyciągá od Uczniów częstégo w nim ćwiczéniá się; a dlá większéy łatwości niech sobie tén ostatni przykłád wypiszą, tym, co wyżéy porządkiém, i każdégo w szczególności na nim działaniá niech dadzą Nauczycielowi sprawę.

Pierwiáſtku Sześciennego liczby całkowitey, w liczbach całkowitych; tedy go i w ułomkach nie znáydziemy. Dowodzi się to ogólnie tymże samym, iak względem Pierwiáſtku kwadratowego, sposobem.

46. Pierwiáſtek Sześcienny liczby iakiey, można tak do prawdziwego przybliżyć, iak tylko zechcemy. Sposób nayogólnieyszy ieſt, używaiąc do tego ułomków dziesiątnych. Niechby n.p. trzeba z 2 wyciągnąć Pierwiáſtek Sześcienny, przybliżaiąc go do prawdziwego w cząſtkach tysiącznych. Wyciągáymy ten Pierwiáſtek, sposobem dopiero podanym, z liczby 2 000 000, 000, a oſtatnie trzy tego Pierwiáſtku cyfry położmy za dziesiątne. Pierwiáſtek Sześcienny liczby: 2 000 000 000 w liczbach całkowitych náybliższych wyrażony, ieſt: 1 259; a zatem Pierwiáſtek Sześcienny liczby 2, przybliżony aż do części tysiącznych iedności, będzie 1, 259. Jakoż Sześcián z 1, 259, ieſt: 1, 995 616 979 mnieyszy od 2, a Sześcián z 1, 26, ieſt: 2, 259 576, większy od 2.

47. Chcąc Pierwiáſtek Sześcienny liczby n. p. 2, przybliżyć do prawdziwego, w ułomkach zwyczaynych, podwoiwszy pierwsze dziewięć Sześcianów, z liczb *naturalnych*, 1, 2, 3, 4. i t. d. uwáżáć należy (podobnie iako się o przybli-

żeniu

żéniu Piérwiaſtku kwadratowégo w Części I. powiedziało:) ieżeli między témi Sześcianami podwoionémi, nie znáyduie się taki, któryby blizki bardzo był Sześciánu zupełnégo. Znáydziémy n. p. że 64. podwoioné, toieſt 128, mało się co różni od 125, toieſt od Sześcianu liczby 5: a zatém 2, które równá się wcale $\frac{128}{64}$; będzie ież prawie równé $\frac{125}{64}$, przeto i Piérwiástek Sześciénny liczby 2, będzie prawie równy $\frac{5}{4}$. Aby zaś poprawić tén piérwszy mniéy dokładny Piérwiástek Sześciénny, podzielmy rożnicę między $\frac{128}{64}$ i $\frac{125}{64}$, toiest $\frac{3}{64}$, przez kwadrat potróyny tego piérwszégo Piérwiástku toiest przez $\frac{75}{16}$, i wieloráz $\frac{1}{100}$, dodámy do Piérwiástku $\frac{5}{4}$; Summa $\frac{126}{100}$, będzie Piérwiástkiém bardziéy przybliżonym. Jakoż Sześcián z $\frac{126}{100}$ iest 2 $\frac{326}{1000000}$; a i to uchybiénié możnáby ieszcze zmnieyszyć podobnym, iak wyżéy, sposobém.

Niechby z liczby 3, trzeba tymże sposobém wyciągnąć Piérwiástek sześciénny przez przybliżénié.

Liczba 3, równá się zupełnie $\frac{1029}{343}$, a nie wiele się różni od $\frac{1000}{343}$; a zatém Piérwiástek Sześciénny liczby 3, będzie prawie równy $\frac{10}{7}$, a poprawuiąc to piér-

wszé

wszé uchybiénié, Piérwiástek bardziéy do práwdziwégo przybliżony będzie $\frac{3029}{2100}$.

48, Gdy ani licznik ani mianownik iakiégo ułomku, nie iest Sześcianém; trzeba obadwa té wyrazy rozmnożyć przez taką liczbę, aby po rozmnożéniu, mianownik stał się Sześcianém: potém dopiéro wyciągá się Piérwiástek z licznika, przez przybliżénié, a wyciągniony, dzieli się przez Piérwiástek zupełny mianownika. I tak, chcąc wyciągnąć Piérwiástek Sześciénny z $\frac{1}{4}$; zamiéniám tén ułomek na $\frac{2}{8}$; a wyciągnąwszy z 2, przez przybliżénié Piérwiástek Sześciénny: 1,259. - - biorę iego połowę 0 629 - - -; toiest: dzielę go przez Piérwiástek sześciénny mianownika 8; Podobnie Piérwiástek Sześciénny z $\frac{5}{12}$, tén sám iest, co i Piérwiástek Sześciénny z $\frac{90}{216}$; toiest $\frac{1}{6}$. Piérwiástku sześciénnégo z 90.

RO-

ROZDZIÁŁ III.

O Rôwnoległościanach prostokątnych (e).

49. *DEfin:* Gdy Bryła iaká zakończoná iest Sześciąścianami prostokątném toiest Sześcią kwadratami; taká Bryła nazywá się, *Równoległościanem prostokątnym* (Parallelopipedum Rectangulum).

50. *Twiérdz.* 1. W każdym Równoległościanie prostokątnym, Sciany na przeciwko siebie stoiące, są równé i rownoodległé; a każdá z tych ścián w szczególności prostopadłą iest, do każdéy ze czterech inszych ścián, które z nią spólny maią bok ieden.

Táb. II. Fig: 4.

Niech będzie ABCDEFGH, Równoległościán prostokątny; spólné dwóch ścián: GBCF, GBAH przecięcié GB, prostopadłym iest do dwóch innych boków: BC, BA, należących do tychże Scián; więc to przecięcié iest też prostopadłém i do płaszczyzny przechodzącéy przez lini-

(e) Częsté używanié Równoległościanów prostokątnych iest nám pobudką do mówiéniá o nich w szczególności: tym bardziéy, że przez to przysposobią się Uczniowie do zaméniániá z większą łatwością innych nie prostokątnych Równoległościanów na prostokątné,

liniie AB, BC, toiest do ściany ABCD. Płaszczyzny zatém ABGH, BCFG, któré przechodzą przez to spólné przecięcié GB, są do ściany ABCD, prostopadłé. Toż mówić i o dwóch drugich ścianach, których spólném przecięciém iest liniiá ED: a zatém cztéry ściany Równoległościanu prostokątnégo, są prostopadłé do téy ściany, z którą maią po iednym boku ſpólnym.

Dowiedliśmy że liniiá GB, prostopadłą iest do ściany ABCD. Podobnie dowieśćby można, że taż liniiá iest prostopadłą i do ściany GFEH; więc té obie ściany są prostopadłé do iednéy linii GB, a zatém są do siebie równoodległé.

Naostatek w Prostokącie ABGH liniie przeciwné AB, GH są równé; iako też i liniie BC, FG: a zatém dwie przeciwné ściany ABCD, EFGH, mogą przystać do siebie

51. *Uwága.* Ponieważ w Równoległościanie prostokątnym z cztérech ścián otáczaiących tén Równoległościán, każdá má iedén bok spólny z bokiém iednéy ściany z dwóch pozostałych; przeto możná wystawić sobie *rodzénié się* (generatio albo formatio) Równoległościanu prostokątnégo, w sposób następuiący.

Niech

Niech będzie Prostokąt iakikolwiek, na którego wierzchołkach wszystkich wystawione są prostopadłe do iego płaszczyzny wszystkie równe. Niech ten Prostokąt posuwa się równoodlegle od pierwszego swego położenia, i tak, aby wierzchołki kątów iego wzdłuż liniy prostopadłych wznosiły się. Mieysce to, które takowem posuwaniem się przeydzie Prostokąt, będzie Równoległościanem prostokątnym.

52. *Defin:* Równoległościan prostokątny, którego wszystkie ściany są kwadratami, nazywamy *Sześcianem* albo z Łacińskiego, *Kubusem.*

Sześcian więc, iest to Bryła zakończona sześcią kwadratami. Wypływa zaś z Twierdzenia poprzedzaiącego, że te 6. kwadratów, są równe, że każde z nich dwa, na przeciwko siebie stoiące są równoodległe, i że ctery z tych kwadratów wspieraiące się na cztérech bokach kwadratu iednego z dwóch kwadratów pozostałych, są do tego kwadratu prostopadłe.

Wystawiwszy sobie Równoległościan prostokątny, iako zbudowany na iedney ze ścian swoich, prostopadła spuszczona na tę ścianę, od punktu któregokolwiek ściany przeciwney, nazywa się *wysokością* tego Równoodległościanu. Ta zaś

wy-

wysokość równa iest spólnému przecięciu dwóch ścián zbudowanych na dwóch przyległych sobie bokach podstawy.

53. *Twierdz:* 2. Gdy podstawy dwóch Równoległościanów prostokątnych mogą przystać do siebie, a ich wysokości są równé, té dwa Rownoległościany, mogą też przystać do siebie, toiest nie różnią się od siebie tylko mieyscém.

Dowodz: Wszystkié ściany tych dwóch Rownoległościanów, podobnie położoné, mogą przystać do siebie; wszystkié téż tych Równoległościanów kąty bryłowé, składaią się ze trzech kątów prostych: a zatém wszystkié té kąty bryłowé mogą przystać do siebie. Przeniosłszy tedy myślą iedén z tych Równoległościanów, tak, aby iedén z kątów iego bryłowych, przystáł do iednégo z kątów bryłowych Równoległościanu drugiégo, i aby ściany piérwszégo kąta, które mogą przystać do ścián drugiégo, w samey rzeczy do niego przystały, wszystkié końce krawędzi piérwszégo kąta, przystaną do końców krawędzi odpowiadaiących przy drugim kącie; a przeto i wiérzchołki kątów bryłowych piérwszégo Rownoległościanu, które są przy końcach tych krawędzi, przypadną na wiérzchołki kątów bryłowych drugiégo Równoległościanu, będącé przy końcach tychże ścián odpowiadaiących piérwszym: a zatém i té kąty bryłowé przystaną iedné do drugich,

54.

54. *Wniosek*. Podzieliwszy wysokość iakiégo Równoległościanu prostokątnégo na pewną liczbę części równych, a przez té wszystkié punkta podziału przeciągnąwszy płaszczyzny równoodległé od podstawy; Równoległościán podzielony będzie na tylé Równoległościanów mnieyszych, któré przystać do siebie mogą, na ilé części była podzieloná wysokość: będą albowiém miały té wszystkié Równoległościany mnieyszé, iednakową wysokość, a takié podstawy, z których każdá przystać może do podstawy wielkiégo Równoległościanu.

55. *Twiérdz*: 3. Dwa Równoległościany prostokątné, wystawioné na téyże saméy podstawie, lub na podstawach mogących przystać do siebie, tak się maią ieden do drugiégo, iak ich wysokości.

Dowodz: 1. Gdyby wysokość iednégo, Równoległościanu, była dwa, trzy, cztéry i t.d. razy większá od wysokości drugiégo; piérwszy Równoległościán, mógłby się podzielić na 2, 3, 4, i t. d. Równoległościany mogącé przystać do drugiégo: a zatém tén piérwszy Równoległościán byłby téż większy od drugiégo, 2, 3, 4, i t.d. razy. Co przystósować możná, i w jnszych przypádkach, gdzieby tylko wysokość iednégo Równoległościanu zawiérała w sobie zupełnie wysokość drugiégo. 2.

2. Gdyby zaś wysokość iednego Równoległościanu zawierała n.p. 3. takich części, iakich 5 zawiérá wysokość drugiego; w takim razie, podzieliwszy pierwszą wysokość na trzy, a drugą na pięć równych części, a przez punkta podziału przeciągnąwszy płaszczyzny równoodległe od podſtáw, podzielilibyśmy pierwszy Równoległościán na 3, a drugi na 5. Równoległościanów iednakowey wysokości, i których podſtawy przyſtaćby mogły do siebie: a zatém pierwszy Równoległościán takby się miał do drugiego iak 3, do 5, toieſt iak wysokość pierwszego do wysokości drugiego. Rozumowanie to służy i do inszego iakiegokolwiek ſtósunku.

Na koniec, to co się powiedziało w przypádkach spółmiernych, przyſtósować można i do przypádków nie spółmiernych, tak iakośmy uczynili, mówiąc o figurach płaſkich, w Części I.

Jakoż niech będą AB, CD wysokości dwóch Równoległościanów proſtokątnych, zbudowanych na teyże samey podſtawie, albo na podſtawach mogących do siebie przyſtać; i niech té wysokości będą nie spółmierne; wszelako dwa takie Równoległościany mieć się do siebie będą, iak wysokości. Táb. II. *Fig.* 5.

Gdyby albowiém ſtósunek tych dwóch Równoległościanów nie był równy ſtósun-

sunkowi ich wysokości; tedy iedna z tych wysokości, byłaby nadto mała do uczynienia tey równości stósunków. Niechże więc, ieżeli to bydź może, stósunek pierwszego Równoległościanu, do drugiego, będzie równy stósunkowi linii AE, (większey od AB) do CD.

Podzielmy liniią CD na pewną liczbę części równych mnieyszych iednak od różnicy BE, i przenieśmy iednę z tych części na liniią AB, tyle razy, ile można; ostatni punkt podziału padnie między A i B, a przeniosłszy daley ku E, iednę ieszcze taką część, punkt podziału padnie między B i E, n.p. w F.

Równoległościany maiące iednakowe podstawy, a wysokości spółmierne CD, i AF, będą do siebie iak te wysokości CD i AF.

A że (przez przypuszczenie) Równoległościan, którego wysokością iest AB, tak się ma do Równoległościanu, którego wysokością iest CD; iak się ma liniia AE do linii CD.

Więc (przez złożenie stósunków) Równoległościany, których wysokościami są AB, i AF, miałyby się do siebie, iak linije AE, i AF. Że zaś pierwszy poprzednik mnieyszy iest od swego następnika, a drugi poprzednik większy od

od swégo następnika; więc proporcyá ta nié má mieysca: a zatém stósunek Równoległościanów, których AB, i CD, są wysokościami, nie iest różnym od stósunku tychże wysokości.

To samo w krótkości tak się wyráżá: Niech będą oznaczoné przez R. AB, R. AF, R. CD, Równoległościany maiącé iednakowé podstawy, wysokości zaś: AB, AF, CD.

Gdyby można uczynić tę proporcyą:

$$R.\ AB : R.\ CD = AE : CD.$$

tedy ponieważ iest; - - $R.\ CD : R.\ AF = CD : AF.$

bydźby powinno - - $R.\ AB : R.\ AF = AE : AF.$

Ta zaś ostatniá proporcyá utrzymać się nié może; więc ani piérwszá.

56. *Twiérdz*: 4. Dwa Równoległościany prostokątné maiacé iednakowé wysokości, są do siebie, iak ich podstawy.

Przenieśmy iedén z tych Równoległościanów, tak, aby podstawa iego stykała się w wiérzchołku spólnym, z drugą podstawą. Niech ABCD będzie iedną z tych podstaw, a drugą: EBGF. Dopełniymy Prostokąta, CBGH przedłużywszy boki, DC, FG, aż do ich spól-

Táb. II. *Fig.* 6.

négo

nego przecięciá, w punkcie H; i wystawmy sobie w myśli Równoległościan trzeci stoiący na podstawie CBGH, dáwszy mu wysokość równą wysokości, iednakowéy dwóch danych Równoległościanów: Równoległościan, którego podstawa iest: ABCD, i ten, którego podstawa iest: CBGH, wystawuiąc ie sobie iak gdyby miały za podstawę prostokąt, którego iednym bokiem byłaby liniiá CB, a drugim, wysokość spólná obudwóch danych Równoległościanów; te, mowię Równoległościany są do siebie, iak ich wysokości AB, i BG, albo iak Prostokąty ABCD i CBGH.

Podobnie Równoległościany, których, CBGH, i BEFG są podstawami, uwáżane, iak gdyby miały za podstawę Prostokąt, którego iednym bokiem byłaby liniiá BG, a drugim spólná wysokość dwóch danych Równoległościanów, są także do siebie, iak ich wysokości, BC, BE, albo iak Prostokąt, CBGH, do Prostokąta BEFG.

Więc (przez złożenie stósunków) Równoległościan, którego podstawą iest ABCD, tak się ma do Równoległościanu, którego podstawą iest BEFG, iak się má pierwszá podstawa do drugiéy.

Krócéy

Krócéy to samo.

Niech Równoległościany, których podstawami są Prostokąty: ABCD, CBGH, BEFG, będą oznaczoné wyrazami następuiącemi: R. ABCD, R. CBGH, R. BEFG.

1. proporcyá.

R. ABCD: R. CBGH = ABCD: CBGH.

2. proporcyá;

R. CBGH: R. BEFG = CBGH: BEFG.

---

więc - - - - - - -

R. ABCD: R. BEFG = ABCD: BEFG.

57. *Wniosek* 1. Dwa Równoległościany prostokątné, ieżeli maią równé tak wysokości, iak i podstawy, są równé; także, ieżeli równé dwa Równoległościany prostokątné, maią równé podstawy, równé będą i ich wysokości: albo ieżeli równé maią wysokości, równé będą i ich podstawy.

58. *Wniosek* 2. Można zawsze zamiénić, albo w myśli zamiénionym sobie wystawić Równoległościán iedén prostokątny, na drugi, iednakową z nim wysokość maiący, a któryby za podstawę miáł prostokąt, z jednym bokiém danym: to się zaś stanie, zamiéniaiąc podstawę Równoległościanu danégo, na

 Pro-

Prostokąt, w któryby wchodził tén bok dany.

59. *Twiérdz.* 5. Dwa Równoległościany prostokątné, ieżeli maią podstawy w stósunku odwrotnym ich wysokości, są równé: i wzaiémnie, ieżeli dwa Równoległościany są równé, będą podstawy ich, w stósunku odwrótnym ich wysokości.

Táb. II. *Fig.* 6. Niech będzie ABCD podstawa, a BI wysokość Równoległościánu iednégo Prostokątnégo; drugiégo zaś Równoległościanu niech będzie podstawa BEFG, a wysokość BL.

1. Niech zachodzi ta między podstawami i wysokościami proporcyá:

ABCD: BEFG=BL: BI; tedy té Równoległościany będą równé.

Wystáwmy sobie drugi Równoległościán, iakoby zamiéniony na inszy téyże saméy wysokości BL, a maiący za iedén bok swoiéy podstawy, bok n p. BC, należący do podstawy piérwszégo Równoległościanu, i niech będzie tego nowégo Równoległościanu podstawa CBMN.

Będzie zatém podstawa ABCD do podstawy BEFG. iak AB do BM: a żeśmy też przypuścili ABCD: BEFG=BL: BI; więc

więc będzie AB: BM=BL: BI, a zatém Prostokąt maiący za boki, AB, BI, równy będzie Prostokątowi maiącému za boki: BM, BL: Że zaś piérwszy i trzeci Równoległościán maią za podstawy té dwa równé Prostokąty, i spólną przy tém maią wysokość BC; więc są sobie równé. A że trzeci Równoległościán równy iest drugiému; więc i piérwszy równy także będzie drugiému.

2. Niech Równoległościán, którégo ABCD iest podstawą, a BI wysokością, będzie równy Równoległościanowi, którégo podstawą iest BEFG: a wysokością BL; idzie zatem że, - - ABCD: BEFG=BL: BI.

Zróbmy to samo, co wyżéy, wykréślénié.

Uważaiąc piérwszy i trzeci Równoległościán, iako maiącé za wysokość spólną, BC, będzie piérwszy do trzeciégo iak Prostokąt AB×BI do Prost: BM×BL. A że té dwa Równoległościany są (przez przypuszczénié, albo wykréślénié) równé drugiému; więc i sobie są równé, więc AB×BI=BM×BL: a zatém AB: BM=BL: BI. Że zaś AB: BM=ABCD: CBMN=ABCD: BEFG; więc ABCD: BEFG=BL: BI.

60. *Wniosek.* Z tego wszystkiego co się powiedziało, wynika sposób znalezienia dwóch liniy, któreby były do siebie w stósunku dwóch Równoległościanów zakończonych prostokątami maiącemi boki dane.

Przykład. Maiąc dany Sześcian i Równoległościan prostokątny, znaleźć linią taką, aby stósunek Sześcianu do Równoległościanu równy był stósunkowi boku Sześcianu do tey linii.

Niech będzie S bok Sześcianu, P, Q, R, boki trzy Równoległościanu. Zamieńmy naprzód Prostokąt, którego bokami są P, i Q, na inszy, któryby miał za bok ieden, bok Sześcianu: toiest, szukaymy czwartey proporcyonalney do S, P, i Q; Niech będzie L, tą czwartą proporcyonalną. Równoległościan dany, równy będzie inszemu, któryby miał za boki: S, L, R: a zatem stósunek Sześcianu do Równoległościanu danego, równać się będzie stósunkowi kwadratu S^2 do Prostokąta L×R. Zamieńmy znowu ten drugi Równoległościan równy danemu, na inszy, któryby znowu miał S za bok ieden, toiest szukaymy czwartey proporcyonalney do S, L, i R. Niech będzie M, tą czwartą proporcyonalną: Równoległościan drugi, a zatem i pierwszy dany, iemu równy, równać się będzie trzeciemu, któryby miał za boki: S, S, M;

więc

więc stósunek Sześcianu do Równoległościanu danego, równać się będzie stósunkowi kwadratu S^2 do prostokąta $S \times M$, toiest stósunkowi S, do M.

Aby tedy znaleźć w liniiach, stósunek Sześcianu do Równoległościanu, prostokątnego, trzeba 1°. do boku Sześcianu, i do dwóch boków Równoległościanu szukać czwártéy proporcyonalnéy; 2°. trzeba znowu do tegoż boku Sześcianu, do boku trzeciego Równoległościanu, i do czwártéy proporcyonalnéy dopiero znalezionéy, szukać inszéy czwártéy proporcyonalnéy: a stósunek boku Sześcianu, do téy ostatniéy linii, równy będzie stósunkowi Sześcianu do Równoległościanu.

Jdzie zatém, że ieżeli mámy dwa Równoległościany prostokątne, będziemy mogli wyrazić w liniiach ich stósunek, szukaiąc w liniiach stósunku tychże Równoległościanów do iakiego Sześcianu: wziąwszy albowiem bok tego Sześcianu, za poprzednika każdego z tych stósunków; stósunek ich następników, wyrażać będzie stósunek w liniiach, tych dwóch Równoległościanów.

61. *Uwága.* Wszystko to, co się powiedziało o przyrównywaniu, albo mierze Jeometryczney Równoległościanów prostokątnych, zgádzá się zupełnie z nauką podaną w Arytmetyce, o przyrównywaniu

wnywaniu liczebnem Równoległościanów.

Przykł. Niech iedność wyráżá bok Sześcianu wziętego za miarę do przyrównywaniá; a niech boki Równoległościanu, który chcemy do Sześcianu przyrównywać, zawieraią ten bok Sześcianu kilka razy oznáczonemi przez liczby n p. 5, 7, i 9. Czwártá proporcyonalná do boku Sześcianu, i do dwóch pierwszych boków Rownoległościanu wyrazi się przez liczbę 35, toiest zawierać będzie bok Sześcianu, razy 35; czwártą zaś drugą proporcyonalną, do tegoż boku Sześcianu, do trzeciego boku Równoległościanu i do pierwszey czwártey proporcyonalney, wyrazi liczba 315; toiest zawierać ta będzie bok sześcianu, razy 315. A zatem Równoległościán, zawierać będzie w sobie Sześcián razy 315; toiest, wziąwszy Sześcián za iedność albo spólną miarę; ten Równoległościán wyrazi się przez liczbę 315, która podług wykreśleniá pochodzi z rozmnożeniá liczb 5, 7, i 9.

62. *Defin.* Gdy cztery takie mámy liniie, że stósunki, pierwszey do drugiey, drugiey do trzeciey, trzeciey do czwartey są równe o takich liniiach mówi się, że są *ciągło* (continue) proporcyonalne.

Przy-

Przykłady liczebné: Cztéry liczby: 1,2,4,8; nazywaią się ciągło proporcyonalnémi, a cztéry linie, któréby tak się do siebie miały, iak té cztéry liczby, nazywałyby się też ciągło proporcyonalnémi. Toż mówić i o liczbach, 8,12,18,27, z których każdá zawiérá w sobié, poprzedzaiącą ieden ráz i pół, i t. d.

Stósunek piérwszy z tych liniy, do czwártéy, składá się z stósunku, piérwszéy do drugiéy, drugiéy do trzeciéy i trzeciéy do czwártéy (a to przez definicyą stósunku skłádanego). Że zaś wszystkié té szczególné stósunki są równé; więc stósunek piérwszéy téy linii do czwártéy, skłádá się z 3 stósunków równych, má zaś nazwisko stósunku *tróymnożnégo* (ratio triplicata) i piérwsza ta liniia do czwártéy, będzie w stósunku tróymnożnym piérwszéy do drugiéy.

63. *Przysłósowanié*. Niechby Równoległościán, który wymiérzać mámy przez Sześcián wzięty za iedność, był i on sám Sześcianém.

Niech będzie AB bok Sześcianu maiącégo służyć za miarę: AC bók Sześcianu który wymiérzyć mámy. Szukáymy do AB, i AC, trzeciéy proporcyonalnéy AE (kréśląc Tróykąt prostokątny ABC, maiący, AB za iedno ramié kąta prostégo, a AC za przeciw prostkątną; i wystawuiąc do

Tab. II. *Fig.* 7.

do linii AC, w punkcie C, prostopadłą CE, aż do iéy spotkaniá się w E, z liniią AB przedłużoną.) Szukáymy daléy do AB,AC,AE, czwártéy proporcyonalnéy, AF (wyprowádzaiąc od punktu E linii AE, prostopadłą EF, aż do iéy spotkaniá się w punkcie F z liniią AC przedłużoną.) Piérwszy Sześcián, wzięty za miarę, tak się będzie miáł do Sześcianu, który wymiérzać przypádá, iak liniiá AB, do linii AF, toiest: iak liniiá piérwszá do czwártéy z liniy ciągło proporcyonalnych: z których piérwszych dwóch iedna iest bokiém Sześcianu wziętégo za miarę, a drugá bokiém Sześcianu wziętégo do wymierzéniá: a zatém stósunek piérwszégo Sześcianu do drugiégo iest tróymnożnym stósunku ich boków.

I tak ieżeli bok Sześcianu iakiégo trzy razy zawiérá w sobie bok Sześcianu wziętégo za miarę, Sześcián piérwszy będzie do drugiégo, iak 3×3×3 do 1. albo iak 27, do 1; toiest ieżeli liniiá AC zawiérá w sobie razy trzy liniią AB; liniiá też AE zawiérać będzie razy 3 liniią AC, a zatém 9 razy liniią AB, a liniiá AF zawiérać będzie 3 razy liniią AE: a tém samém 27 razy liniią AB.

64. *Wzaiémnie.* Gdy trzeba znaleźć Sześcián, którýby do drugiégo był w stósunku danym, i takim, którýby się równał stósunkowi boku Sześcianu tego dru-

drugiégo, do linii danéy; bok Sześcianu, którégo szukámy, má bydź drugą liniią ze cztérech ciągło proporcyonalnych, między którémi piérwszá z czwártą, są w danym stósunku, toiest: bok tén szukany, má bydź liniią piérwszą z dwóch śrzedních ciągło proporcyonalnych między piérwszą i czwártą.

Zagádniénié to, nié może bydź rozwiązané przez Jeometryą początkową, chyba trafunkiém przez doświadczanié i szukanié nie pewné: do dokładnégo i pewnégo rozwiązaniá, potrzeba iednéy przynáymniéy z liniy krzywych, nazwanych *przecięciami konicznémi* (sectiones conicæ). I toć to zagádniénié o znalezíéniu dwóch śrzednich proporcyonalnych, piérwszym powodém bydź musiało Jeometróm, do uważániá, tych liniy krzywych dopiéro wspomnionych, i do uczyniéniá piérwszégo kroku w wyższéy Jeometryi. Gdy się w *Delos* radzono Wyroczni, coby za sposób był zjednania Bogów zagniewanych, i odwrócéniá zarazy powietrza niszczącégo Państwo Attyckié; miał się dadź głos słyszeć: aby *dwumnożono ołtarze* (duplicentur altaria). Po wielu niepożytecznych zawodach, postrzeżono nakoniec, iż trzeba było znaleźć bok Sześcianu dwa razy tak wielkiégo, iak drugi wzięty za spólną miarę, toiest: iż trzeba było wynaleźć piérwszą z dwóch śrzednich Jeometrycznych, między dwiéma liniiami,

z któ-

z którychby iedna dwa razy w sobie zamykała drugą.

65. W Arytmetyce; gdy stósunek dany, iest stósunkiem liczby iedney Sześcienney, do drugiey także Sześcienney, rozwiązać można dokładnie to zagadnienie. Tak n. p. gdyby dwa Sześciany miały bydź do siebie, iak 1. do 8; albo iak 1. do 27, albo iak 8. do 27. i t.d. boki ich byłyby ieden do drugiego, iak 1. do 2, albo iak 1. do 3, albo iak 2. do 3. i t. d.

Ale gdy stósunek dany, nie iest stósunkiem dwóch liczb Sześciennych, rozwiązanie będzie tylko do prawdziwego przybliżone. I tak, gdy Sześcian ieden, ma bydź dwa razy tak wielki, iak drugi, wziąwszy bok tego drugiego, za iedność, bok pierwszego powinienby bydź wyrażony przez liczbę taką, którey Sześcianem, iest 2: a zatem pierwiastek Sześcienny, liczby 2, wyrażałby ten bok; Pierwiastek zaś ten przybliżony, iest 1, 26 toiest bok mnieyszego Sześcianu, takby się miał do boku Sześcianu dwa razy tak wielkiego, iak 1, do 26, albo iak 100, do 126. albo ieszcze dokładniey iak 23, do 29.

66. *Uwaga.* Gdy stósunek dwóch liniy iest dany; dany iest tem samem i stósunek ich Szescianów.

Tak

Tak albowiém mieć się będą do siebie té Sześciany, iak liniia piérwszá do czwartéy ciągło proporcyonalnéy, wziąwszy za piérwsze dwa wyrazy tey proporcyi dwie liniie, których stósunek iest dany.

Skąd wypádá wniosek następuiący:

67. Gdy cztéry liniie są w proporcyi, ich Sześciany w proporcyi też będą, toiest: gdy stósunek dwóch piérwszych liniy równa się stósunkowi dwóch drugich; stósunek też Sześcianów z dwóch piérwszych liniy, równać się będzie stósunkowi Sześcianów z dwóch drugich liniy.

W Arytmetyce: cztéry licz: 2, 3, 8, 12 składaią proporcyą
ich Sześciany: - - 8, 27, 512, 1728, składaią także proporcyą.

68. *Uwága.* Podanié zamknięté w tym wniosku, iest tylko wyszczególnieniém podaniá następuiącégo:

Niech będą trzy iakiékolwiek proporcye, i cztery takié Równoległosciany prostokątné; aby krawędzie piérwszégo Równoległościanu, były trzéma poprzednikami trzech piérwszych stósunków, krawędzie drugiégo, trzéma następnikami tychże trzech piérwszych stósun-

sunków, krawędzie trzeciégo, trzéma poprzednikami, trzech drugich stósunków, a krawędzie czwártégo, trzéma następnikami tychże trzech drugich stósunków: stósunek piérwszych dwóch Równoległościanów, równy będzie stósunkowi dwóch ostatnich.

Trzeba naprzód to podanié obiaśnić na przykładach liczebnych.

W ogólności zaś niech będą trzy iakiékolwiek proporcye: A: B = C: D.

a: b = c: d.

a: *b* = *c*: ∂.

Zamiéńmy stósunek A do B na inszy b do czwártéy linii *E*: Zamiéńmy podobnie i stósunek C do D na inszy d, do czwártéy linii *e*.

Będą podstawy drugiégo i czwártégo Równoległościanu równé prostokątóm B×b, i, D×d; a zatém podstawy dwóch piérwszych Równoległościanów będą się miały do siebie iak a do *E*, a podstawy zaś dwóch drugich Równoległościanów będą się miały do siebie iak c do *e*.

A że

A że przez przypuszczénié i wykréślénié stósunki; A do B, b do *E*, C do D, d do *e*, są wszystkié równé, - -

- więc - - b: *E* = d: *e*.
- Że zaś - - a: b = c: d
- więc a: *E* = c: *e*.

A zatém stósunek podstáw Równoległościanów dwóch piérwszych, równy iest stósunkowi Rownoległościanów dwóch drugich.

Jest téż z przypuszczéniá;

- - - - *a*: *b* = *c*: *d*

więc Prostokąty *aa*, E*b* *cc*, *ed* składaią proporcyą; a zatém cztéry Równoległościany; któreby té Prostokąty miały za podstawy, i z których dwa piérwszé miałyby spólną wysokość A, dwa zaś drugié wysokość C, byłyby także z sobą w proporcyi. A że piérwszy z tych Równoległościanów miałby za krawędzie trzy liniie: A, a, *a*, drugi zaś równałby się tému, któryby miał za krawędzie trzy liniie: B, b, *b*: a to dlá tego, że są równé Prostokąty: (B × b i A × E) trzeci z tych Równoległościanów miałby za krawędzie, trzy liniie: C, c, *c*, a czwárty równałby się tému, któryby miał za krawędzie, trzy liniie: D, d, *d*; więc té cztéry Równoległościany byłyby w proporcyi.

ROZ-

ROZDZIÁŁ IV.

O Równoległościanach nie prostokątnych.

69. *Defin:* Bryła zakończona 6 ścianami parzyſto równoległémi, nazywá się *Równoległościanem*: a zatém Równoległościany proſtokątné, o których w Rozdziéle poprzedzaiącym mowa była, są pewnym gatunkiém Równoległościanów.

70. *Twiérdz:* 1. W Równoległościanie, wszyſtkié ściany są Równoległobokami; każdé zaś dwie ściany przeciwné, mogą przyſtać do siebie.

Táb. III. *Fig.* 1. Niech będzie Równoległościán ABCDEFGH: wszyſtkié iego ściany są Równoległobokami, a ściany przeciwné n. p. ABCD, EFGH mogą do siebie przyſtać.

Dowodz: Ponieważ płaszczyzny równoodległé ABCD, GHFE, są przecięté trzecią płaszczyzną BGFC; więc ich spólné przecięciá BC, FG z tą płaszczyzną, są równoodległé. Także pokázać można, że liniie HE, GF są równoodległé, i liniie: HG, EF równoodległé, a zatém że ściana HGFE ieſt Równoległobokiem.

Podo-

Podobnie i wszyſtkié inszé ściany są także Równoległobokami.

W szczególności zaś, liniie: BA, GH, i liniie BC, GF, są od siebie równoodległemi; więc równé są kąty ABC, HGF. A że té liniie BA, GF, i BC, GH są równé; więc Równoległoboki, ABCD, HGFE, mogą przyſtać do siebie. Toż mówić o każdéy inszéy parze ścián przeciwnych.

71. Stąd téż wyſtawić sobie można każdy Rownoległościán, iakoby utworzył się naſtępuiącym sposobém:

Niech będzie iakikolwiek Równoległobok, a od iednégo z jego wiérzchołków wyciągniymy liniią czyniącą z jego płaszczyzną, kąt iakikolwiek: wyciągniymy potém i przez drugié wiérzchołki, liniie rownoodległé od piérwszéy, i zróbmy wszyſtkié sobie równémi. Niech na koniec tén Równoległobok posuwá się równoodleglé od piérwszégo swégo położéniá, i niech wiérzchołki iego nie schodzą nigdy z liniy równoodległych, mieyscé od Równoległoboku, tym sposobém przebyté, będzie Równoległościaném.

72. *Twiérdz:* 2. Dwa Równoległościany mogą przyſtać do siebie, gdy i wſzyſtkié ich odpowiadaiącé sobie ściany

ny przystać do siebie mogą, i gdy kąty ich bryłowé także sobie odpowiadaiącé, robią się z kątów równych należących do tychże ścian.

Tab. III. Fig. 1. i 2.

Niech będą dwa Równoległościany: AF, af, których wszystkie ściany odpowiadaiącé sobie w jednym i w drugim Równoległościanie, mogą przystać do siebie, i których kąty bryłowé także sobie odpowiadaiącé n. p. A, i a, robią się z równych kątów tychże ścián; té dwa Równoległościany przystać do siebie mogą.

Dowodz: Ponieważ kąty bryłowé, A, i a, robią się z równych względém siebie kątów płaskich; więc przystać do siebie mogą. Przeniósszy tedy Równoległościán af, tak aby kąt bryłowy a, przystał w rzeczy samey do kąta bryłowégo A: ponieważ i kąty płaskié, z których się té bryłowé róbią, przystaią iedné do drugich sobie równych, a linie ab, ad, ah, są równé względém liniy AB, AD, AH; więc punkta: b, d, h, przystaną do punktów: B, D, H, i ściany także czyniącé dwa kąty bryłowé a, i A, przystaną iedné do drugich: a zatém i punkta: c, g, e, przystaną do punktów odpowiadaiących sobie: C, G, E, a w szczególności liniie: bc, bg, przystaną do liniy: BC, BG. Więc i płaszczyzna przechodząca przez liniie: bc, bg, leżeć będzie

dzie na płaszczyznie przechodzącéy przez liníie BC, BG. Że zaś przypuściliśmy, iż ściana bcfg, przystać może do ściany BCFG; więc punkt f, przystanie do punktu F.

Tymże sposobém okázać możná, że i wszystkié insze ściany, i kąty Równoległościanu af, przeniesionégo, przystaną do inszych ścián i kątów Równoległościanu AF, a zatém té dwa Równoległościany przystać do siebie mogą.

73. *Uwága.* Tymże cale sposobém dowodzi ſię, że dwie iakiékolwiek Bryły, przystać mogą do siebie, gdý wſzystkié kąty 'ich bryłowé odpowiadaiącé sobie, przystać także do siebie mogą, i gdy ściany iednéy Bryły przyſtać mogą do ścián odpowiadaiących w drugiéy Bryle.

73. *Definicye.* Uwáżaiąc Równoległościán iakoby zbudowany na iednéy ze ścián swoich, ta ściana nazywá się, *podstawą* iego; a proſtopadłá od punktu któregokolwiek ściany przeciwnéy, do téy spuszczoná, nazywá się *wysokością* tego Równoległościanu.

Gdy ściany zbudowané na bokach podſtawy, są do niéy proſtopadłémi, taki Równoległościán nazywá się *proſtym* (Parallelopipedum rectum) Równoległościany proſtokątné, są gatunkiém Ró-

wnoległościanów proſtych, w których podſtawa nawet sama ieſt proſtokątém.

75. *Twiérdz:* 3. Dwa Równoległościany równé są w *bryłowatości* (soliditas) gdy maią iednakową wysokość, i na téyże saméy są zbudowané podſtawie, i gdy dwie ich ściany, na iednéy płaszczyznie znáyduiącé się, ſtoią na tymże samym boku podſtawy.

Tab. III. *Fig.* 3.

Niech będą dwa Równoległościany: ACGE, i ACLI iednakiéy wysokości zbudowané na téyże saméy podſtawie AC; i niech dwie ich ściany, AG, AL, wspiéraiącé się na tymże samym boku AB podſtawy, znáyduią się na téyże saméy płaszczyznie: te dwa Równoległościany, są równé w bryłowatości.

Dowodz: Dwie Bryły: ADIEHM, BCKFGL, maią takié wszyſtkié ściany odpowiadaiącé sobie, iż iedné do drugich przyſtać mogą: wszyſtkié podobnie kąty ich bryłowé przyſtać mogą do siebie. Jakoż Tróykąt HAM, może przyſtać do Tróykąta GBL, a w szczególności kąty HAM, GBL, są równé. Równoległobok HADE przyſtać może do Równoległoboku: GBCF sobie przeciwnégo, w piérwszym Równoległościanie, a w szczególności kąty: HAD, GBC, są równé: Równoległoboki także: MADI, LBCK przeciwné sobie, w drugim Równo-

wnoległościanie, mogą do siebie przyſtać, a w szczególności kąty: MAD, LBC, są równé; więc kąty bryłowé A, B, i ściany tych kątów mogą przyſtać do siebie. Toż mowić i o wszyſtkich inszych kątach bryłowych, i o wszyſtkich inszych, tych dwóch brył, ścianach. Zaczém té dwie bryły przyſtać mogą do siebie, i są równe sobie w bryłowatości. A że od całéy bryły ACLE odiąwszy piérwszą z brył wyżéy wyrażonych, ADIEHM, zoſtaie się Równoległościan ACLI, a odiąwszy od téyże całéy bryły ACLE, drugą bryłę BCKFGL, zoſtaie się Równoległościan ACGE; więc té dwa Równoległościany są równé. (f)

76. *Twiérdz.* 4. Dwa Równoległościany są równé w bryłowatości, gdy iednaką maią wysokość, i na téyże saméy są zbudowané podstawie, chociaż żadná z jch ścián ſtoiących na bokach podſtawy; nie będzie na téyże saméy płaszczyznie.

Niech będą dwa Równoległościany: ACGE, i ACLI, na téyże saméy podſtawie AC, z jednaką wysokością: i niech żadná z jch

Táb. III. *Fig.* 4.

(f) To dowodzénié iest ogólné, i rozciągá się do iakiégożkolwiek położéniá linii MI; czyliby punkt M przypádáł na punkt G, czyliby się znáydowáł między G i H, czyli nakoniec byłby na linii HG przedłużonéy.

z jch dwóch ścián wspieraiących się na tymże samym boku podstáw, nie znáyduie się na teyże samey płaszczyznie położoná; te dwa Równoległościany są równe.

Dowodz: Przedłużmy liniie KI, HE, tak daleko, aż się zniydą z sobą w punkcie O. Niech ieszcze i liniiá LM, przedłużoná, przeciná HE, w N; a liniiá GF także przedłużoná niech przeciná IK w P, i niech Q, będzie punktém przecięciá liniy GF, LM, albo ich przedłużéń.

Pociągniymy liniie AN, DO, BQ, CP.

Bryła ACQO, będzie Równoległościanem, czego bardzo łatwo dowieśdź możná.

Równoległościán ACQO, má tę samę co tamte dwa, podstawę AC.

Má ścianę AO na płaszczyznie ściany AE, należącey do Równoległościanu, ACGE; więc temu Równoległościanowi będzie równy.

Má zaś oprócz tego ścianę AQ na płaszczyznie ściany AL, należącey do Równoległościanu ACLI; więc będzie równy i temu drugiému Równoległościanowi.

Więc

Więc Równoległościán ACQO, równy iest tak Równoległościanówi ACGE, iako i Równoległościanowi ACLI; a zatém i té dwa Równoległościany są téż sobie równé.

77. *Twiérdz: 5.* Dwa Równoległościany są równé, gdy iednaką maią wysokość i równé podstawy, z jednym spólnym bokiém, i gdy ich ściany na tymże samym boku spólnym wystawioné, znáyduią się na téyże samey płaszczyznie.

Niech będą dwa Równoległościany: ACGE, ICOQ iednakiéy wysokości; a podstawy ich równé AC, IC, niech maią bok spólny CD, na którym wystawioné są dwie ściany DF, DP na téyże samey płaszczyznie znáyduiącé się té dwa Równoległościany są równé.

Tab. III. Fig. 5.

Wykréśl: Przez punkta I, i L, poprowádźmy na płaszczyznie AG, czyli AO, liniie JN, LM, równoodległé od AH, albo BG, i niech té równoodległé spotykaią w N i M. liniią HO. Pociągniymy i liniie EN, FM. Bryła JCME będzie téż Równoległościaném.

Dowodz: Równoległościán: ICME, má téż samę podstawę JC, i tę samę wysokość, co i Równoległościán JCOQ, a zatém są sobie równé.

Tén-

Ténże Równoległościán JCME, i Równoległościán ACGE, uważaiąc w nich ścianę spólną DF, iak podstawę, maią też iednaką wysokość, a zatém są sobie równé. Więc Równoległościán JCME, równy ieſt tak iednému, iak i drugiému Równoległościanowi: ACGE, i JCOQ, a zatém i té dwa Równoległościany są równé.

Táb. III. Fig. 5. 78. *Twierdz:* 6. Dwa Równoległościany są równé, gdy maią iednaką wysokość, i gdy ich podſtawy maiącé bok iedén ſpólny, są równé.

Niech we dwóch Równoległościanach iednakiéy wysokości będą dwie podstawy: AC, i IC równé, i maiącé spólny bok CD; té dwa Równoległościany będą równé.

Wykréśl: Na podſtawie IC, iednégo z tych Równoległościanów, który nazwiémy piérwſzym, postáwmy trzeci Równoległościán téyże saméy wysokości, tak, aby ściana iego ſtoiącá na boku CD, znáydowała się na płaſzczyznie ściany drugiégo Równoległościanu, stoiącéy na tymże boku;

Tén trzeci Równoległościán, iako maiący z piérwszym spólną podstawę i wysokość, będzie mu równy. Ténże trzeci Równoległościán, będzie równy, i drugiému: bo maią równé podſtawy: IC, AC,

AC, ze spólnym bokiém CD, i ściany ich stoiące na boku CD, znáyduią się na téyże samey płaszczyznie.

Więc tén trzeci Równoległościán równy iest tak piérwszému iak i drugiému, a zatém i oné sobie równé będą.

W szczególności. Równoległościán każdy równy iest Równoległościanowi prostokątnému, który má tę samę, co i tamtén wysokość, podstawę równą podstawie iego, i bok iedén spólny obudwóm podstawóm.

79. Skąd wyniká, że cokolwiek się powiedziało o Równoległościanach prostokątnych; wszystko to do iakichkolwiek inszych można przystósować; kładąc zamiast każdégo z nich Równoległościán prostokątny, téyże samey wysokości, i podstawy równey, a maiącey bok iedén spólny z podstawami Równoległościanów nie prostokątnych. I tak.

1. Dwa Równoległościany, maiące rowné podstawy i wysokości, są równé: bo Równoległościany prostokątné iednakiey wysokości, i maiące z tamtémi Równoległościanami równé podstawy, a w nich spólny bok iedén, są równé.

2. Dwa Równoległościany są téż równé, których podstawy są w stósunku odwrótnym, ich wysokości.

3.

3. Dwa Równoległościany, których bryłowatości są równe, maią podstawy w stósunku odwrotnym ich wysokości.

4. Wszystko to, co się powiedziało o zamiénianiu stósunku dwóch Równoległościanów prostokątnych, na stósunek dwóch liniy; i o mierze liczebnéy dwóch Równoległościanów prostokątnych, przystósować można do miary Równoległościanów nie prostokątnych; kładąc zamiast trzech boków, Równoległościanów prostokątnych, bok iedén podstawy Równoległościanu nie prostokątnégo, wysokość téy podstawy względém tego boku, i wysokość Równoległościanu względém téy podstawy.

80. *Przestroga.* Gdyby ścisłe i prawdziwe Jeometryczne dowodzénie wyżéy położone przytrudném się zdawało Ucznióm do poięcia, mimo wystawionych im przed oczy figur, z drewna, lub papiéru wyrobionych; można im to będzie łatwiéy do poięcia podadź w sposób następuiący.

Niecháy dwa Równoległościany z równémi podstawami, i wysokościami stoią na téyże saméy płaszczyznie. Niech insza iakákolwiek płaszczyzna równoodległa od piérwszéy, przecina te dwa Równoległościany. Przecięcia ich będą równe, i podobne ich podstawóm, a zatém

zatém i sobie równé będą: i gdziekolwiek té dwa Równoległościany przetniémy przez płaszczyznę równoodległą od ich podftáw; równé zawsze będą té przecięciá. Żádnéy więc nie masz przyczyny, dlá któreyby ieden z tych Równoległościanów nié miáł bydź równym drugiému.

Trzeba tu iednak oftrzedz zaráz Uczniów, iż tym sposobem, słabo się w rzeczy saméy dowodzi równość dwóch Równoległościąnów. Bo chociáżby iak náywięcéy było tych przecięć równoodległych od podftáw Równoległościanów, toieft: chociáżby iak náymnieyszá była odległość każdégo z tych przecięciá, od drugiégo náybliższégo; wszelako części Równoległościanów zawarté między takiémi dwoma przecięciami, są ieszcze Równoległościanami, które tak się względém siebie maią, iak się maią całé Równoległościany, których tamté są częściami. Aby więc wnieść można równość Równoległościanów, z równości ich części; trzebaby piérwéy dowiéśdź równości tych części.

Może się imainacyá nasza tak daleko zapuścić, że przez nię wyftawimy sobie dwóch Równoległościanów przecięciá, tak blizkié iedné od drugich, iż części między niémi zawarté będą się zdáwać nie różnić od podftáw tychże

Ró-

Równoległościanów; lecz prawdziwe rozumowanie uczynić tu różnicę potrafi i powinno. Wiémy albowiém, że małość lub wielkość iakiéy rzeczy, nie iest w sobie małością lub wielkością, ale się albo za małość bierze względém inszéy rzeczy większéy, albo za wielkość, względém inszéy mnieyszéy: i nie można nigdy bryły choćby też náycieńszéy za iedno brać z powierzchniami, które ią kończą. Prawda to iest, że ieżeli większá będzie liczba przecięciów, dwóch Równoległościanów przez płaszczyzny równoodległe od ich podstáw; tedy też mnieyszá będzie różnica małych dwóch ich części zawartych między dwiéma náybliższémi płaszczyznami, czyli przecięciami: ale znowu, ieżeli iakakolwiek iest choćby też náymnieyszá, ta różnica; tedy wielokroć powtórzona może uczynić różnicę wielką, w dwóch Równoległościanach, których równości chcémy dowodzić, z równości ich cząstek, czyli z małych Równoległościanów, z których się składaią.

Ta sama trudność do rozwiązaniá zostaie, gdyby kto równości dwóch Równoległościanów maiących iednaką podstawę i wysokość, a z których ieden byłby n. p. prosty, a drugi nie chciał dowodzić z podnoszéniá się w górę ich podstáw w równéy zawsze od pierwszégo położéniá odległości; ponieważ pier-

wéy-

wéyby dowieśdź trzeba, że mieysca od podstáw przebyté, nie podług téy drogi brané bydź powinny, którą w saméy rzeczy punkt każdy tych podstáw przebył; (bo do iednakiéy wysokości postępuiąc, więcéy mieysca przeydzie punkt n. p. skráyny Równoległościanu ukośnégo, niż tego, który iest prosty) ale to mieyscé od podstáw Równoległościanów przebyté, powinno się wymiérzać wzdłuż linii prostopadłéy do téyże podstawy, ponieważ ta tylko liniiá mierzy odległość, w któréy podstawa podnoszeniém się swoiém oddaliła się od piérwszégo swégo położéniá.

Następuiącé porównywanié może iakożkolwiek służyć do ułatwiéniá tych wątpliwości, lubo ich nie znosi wcale.

Gdy dwa Równoległoboki zrobioné na téyże saméy podstawie, i z równą wysokością, przetniémy liniią równoodległą od podstawy; obadwa przecięciá równé będą podstawie. Wszystkié téż inszé takowé przecięcia tych dwóch Równoległoboków, byłyby równé; i tyléby ich było w jednym, co i w drugim Równoległoboku. Toż mówić i o dwóch Tróykątach, których przecięciá równoodległé od podstawy spólnéy, byłyby także równé. Dlá czegoż więc té dwa całé Równoległoboki, lub Tróykąty nié

mia-

miałyby sobie bydź równe? Ponieważ tedy tym sposobém dochodzimy względém powiérzchni płaſkich, téy saméy práwdy, któréy doszliśmy ścisłém piérwéy dowodzéniém; iuż tén sám ſkutek, powinién nas wątpliwości pozbawić, którąbyśmy mieć mogli w używaniu tego sposobu. Możná zatém przyſtósować go i do brył dlá téyże przyczyny.

Obiaśni się to iaśnie i potém, gdy mówić będziémy o sposobie *wyczérpaniá* (de methodo exhauſtionis.)

81. *Twiérdzénié.* 7. W jakimkolwiek Równoległościanie, przez krawędź którąkolwiek, i przez przekątną iednéy ze ścián iego przeciągnąwszy płaszczyznę; przecięcié Równoległościanu przez tę płaszczyznę, będzie Równoległobokiém, i podzieli Równoległościán na dwie części, które przyſtać do siebie mogą.

Táb. III. *Fig. 1.*

Niech będzie Równoległościán: ACGE; przez krawędź AH, i przez przekątną HF niech przechodzi płaszczyzna; liniie AH, CF są równoodległé, a płaszczyzna, którá przechodzi przez AH, HF, przechodzi téż i przez CF. Że zaś liniie: AH, CF są równé, i równoodległé; więc Czworokąt ACFH, ieſt oráz i Równoległobokiém.

Dwie Bryły: ABCFGH, FEHACD, mogą przyſtać do siebie. 1.

1. Wszystkie ich ściany, są równe iedne względem drugich, bo ściany ich *Równoległoboczne* (Parallelogrammicæ) są ścianami przeciwnemi w Równoległościanie; ściany zaś ich Tróykątne iak n.p. ABC, HEF, maią równe boki iedne względem drugich.

2. Wszystkie ich kąty bryłowe mogą przystać iedne do drugich; n.p. kąt bryłowy w A iedney Bryły, robi się ze trzech kątów płaskich: CAB, BAH, HAC, które równe są względem kątów EFH, EFC, HFC, z których się robi kąt bryłowy w F, drugiey bryły.

Więc te dwie bryły mogą przystać do siebie, a w szczególności są sobie równe.

ROZDZIÁŁ V.

O Graniastosłupach.

82. *Twierdzenie przybrane.* Niech będą dwie prostokreślne Figury równe i podobne, wykreślone na dwóch równoodległych płaszczyznach: niech iescze i boki ich równe, będą równoodległe iedne względem drugich; Czworokąty, których bokami przeciwnemi, będą boki równe tych Figur, są Równoległobokami.

Do-

Dowodz: We wszyſtkich takowych Czworokątach, boki dwa przeciwné są równé, i równoodległé: a zatém i inszé boki są téż równé i równoodległé.

83. *Defin*: Niech będzie bryła iaká zakończoná dwiéma Figurami proſtokréślnémi, równémi, podobnémi i równoodległémi à maiącémi wszyſtkié boki, iedné względém drugich równoodległé, i tylą Równoległobokami maiącémi za boki, boki przeciwné tamtych dwóch Figur, ilé każdá z tych Figur má boków, ta bryła nazywá się *Graniastosłupém*, (Prisma). I tak Równoległościany, o których w poprzedzaiących Rozdziałach mówiliśmy, są pewnémi Graniastosłupów gatunkami. Jedna z tych Figur równych i równoodległych, na którey wystawiámy sobie, iakoby zbudowany Graniastosłup nazywá się iego *podstawą*, a proſtopadłá ſpuszczoná na tę podstawę, z punktu iakiegokolwiek ściany przeciwney nazywá się *wysokością* tego Graniaſtoſłupa. Graniastoſłup albo ieſt *proſty*, albo *ukośny*; *prosty*, gdy ściany iego stoią do pionu względém podſtawy; *ukośny*, gdy téż ściany są do podſtawy nachyloné.

Różné także nazwiſka przybiérá Graniaſtoſłup, podług rozmaitéy liczby boków podſtawy swoiéy, albo podług wielości ścián pobocznych. Nazywá się *tróykątnym*, *czworokątnym*, *pięciokątnym*, *sześcio-*

sześciokątnym, gdy podstawa iego iest Tróykątem Czworokątém, Pięciokątém, Sześciokątém i t. d.

84. *Twierdz:* 1. Przeciąwszy gdziekolwiek Graniastosłup płaszczyzna równoodległą od iego Podstawy, przecięcié to będzie Figurą równą i podobną podstawie.

Dowodz: Przecięcié iednéy któréykolwiek ściany poboczné'y, przez tę płaszczyznę, równoodległym będzie od tego boku podstawy, na którym ta ściana stoi; i té dwie liniie będą bokami przeciwnémi Równoległoboku, który za dwa inszé boki ma części dwóch inszych boków téyże ściany, zawarté między podstawą i płaszczyzną przecinaiącą; więc té dwie liniie będą równé.

Przecięciá więc przez tę płaszczyznę dwóch ścián przyległych, będą równoodległé względém boków sobie przeciwnych, należących do podstawy, a zatém kąt, który té spólné przecięciá zrobią, równy będzie kątowi zawartému między témi bokami podstawy.

Będzie tedy mieć przecięcié Graniastosłupa przez tę płaszczyznę, wszystkié swoié boki i wszystkié kąty równé względém boków i kątów podstawy Graniastosłupa, i dlá tego przecięcié to przystać może do podstawy. 85.

85. Można sobie wyſtawić Graniaſtoſłup, iakoby zrobiony przez posuwanié ſię w górę iego podſtawy, w ſposób naſtępuiący:

Niech będzie Figura iaká proſtokréślná, odrysowaná na płaſzczyznie. Od wiérzchołku kąta któregokolwiek téy Figury, wyciągniymy liniią proſtą czyniącą iakikolwiek kąt z tą płaszczyzną. Niech się potém wznosi do góry ta Figura, w równéy zawſze od siebie odległości, a tén wierzchołek niech nigdy nie schodzi z linii od niego wyprowadzonéy; Bryła którá się takim ruchém utworzy, będzie Graniaſtoſłupém.

86. *Twiérdz.* 2. Graniastoſłup tróykątny, ieſt połową Równoległościanu téyże saméy co on wysokości, któryby za podſtawę miáł Rownoległobok z dwoma bokami, i kątém zawartym, równaiącémi się dwóm bokóm podſtawy tego Graniaſtoſłupa, i kątowi między niémi zawartému.

Niech będzie Graniaſtoſłup tróykątny ABCDEF, którégo podſtawą ieſt Tróykąt ABC. Dokończmy Równoległoboku ABCG, którégo dwoma bokami są AB, BC; na tym Równoległoboku dokończmy Równoległościanu ACEH, któryby miáł ſpólné dwie ściany AE, i BD z Graniaſtoſłupém tróykątnym.

Dwa

Dwa Graniastosłupy Tróykątne: ABCDEF, DHFAGC, mogą do siebie przystać, bo są dwiema częściami oddzielonemi przez płaszczyznę przekątną ACDF; a zatem ieden z nich, n. p. Graniastosłup ABCDEF, iest połową Równoległościanu ACEH.

87. *Wniosek.* Cokolwiek się powiedziało o Równoległościanach względem ich wielkości; wszystko to przystósować można do Graniastosłupów tróykątnych, które tych Równoległościanów są połowami.

1. Dwa Graniastosłupy tróykątne, równey wysokości i podstawy, równaią się i w bryłowatości.

2. Dwa Graniastosłupy tróykątne, których podstawy są równe, maią się do siebie, iak ich wysokości.

3. Dwa Graniastosłupy tróykątne iednakiey wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy.

4. Dwa Graniastosłupy tróykątne, których podstawy są w stósunku odwrotnym ich wysokości, równaią się sobie w bryłowatości.

5. Dwa Graniastosłupy tróykątne, równe w bryłowatości, maią podstawy w stósunku odwrótnym ich wysokości.

6. Co ſię powiedziało o porownywaniu dwóch Równoległościanów, to twierdzić można i o porównywaniu dwóch Graniaſtoſłupów tróykątnych. Trzeba podobnie dla znalezienia ich bryłowatości przez rachunek, rozmnożyć liczbę, znaczącą wielkość podſtawy Graniaſtoſłupa tróykątnego, przez liczbę znaczącą wielkość iego wysokości.

7. Maiąc wiadomą podſtawę Graniaſtoſłupa tróykątnego, i kąty dwóch ścián iego, które z kątém podſtawy czynią ieden kąt bryłowy, można wyznaczyć Graniaſtosłup tróykątny, i iego wysokość, a zatem i bryłowatość tymże samym ſposobem, iak się czyniło względem Równoległościanów.

8. Graniaſtoſłupy tróykątne, maiące ſpólny kąt ieden bryłowy, są do siebie iak Równoległościany proſtokątne, maiące té same trzy krawędzie; w rachunku zaś tak są do siebie, iak liczby trzy ciągło iedna przez drugą rozmnożone; wyrażaiące wielkość tych trzech krawędzi.

88. *Twierdz:* 3. Graniaſtoſłup nie tróykątny może bydź rozłożony na Graniaſtoſłupy tróykątne téyże co on wysokości; za podſtawy zaś maiące Tróykąty, na które rozdzielona ieſt iego podſtawa przez tyle przekątnych cią-

gnio-

gnionych od iednego tey podstawy wierzchołka do innych, ile ich poprowadzić można.

Niech będzie ABCDE, podstawa n p. pięciokątna Graniastosłupa ABCDE edcba. Od tey wierzchołka n p. A poprowadźmy przekątne: AD, AC, te rozdzielą Podstawę na trzy Tróykąty: AED, ADC, ACB. Na ścianie przeciwney podstawie, od punktu *a*, odpowiadaiącego punktowi A, poprowadźmy przekątne: ad, ac.

Táb. IV. *Fig.* a.

Liniie Aa, Dd, są obiedwie równoodległe od linii Ee, i oney równe; więc i względem siebie będą równoodległemi i równemi; a przeto Czworokąt ADda, iest Równoległobokiem, a zatem Bryła ADE eda, iest Graniastosłupem tróykątnym. Tymże sposobem okazuie się, że i Bryły: ACD dca, ACB bca, są Graniastosłupami tróykątnemi.

89. *Twierdz:* 4. Dwa iakiekolwiek Graniastosłupy maiące równą wysokość, tak się do siebie maią, iak ich podstawy. Jakoż Graniastosłupy ADE eda, ADC cda, ACB bca, i t. d. maią się do siebie iak ich podstawy; ADE, ACD, ABC; więc ieden z nich, n p. Graniastosłup: ADE eda, tak się ma do summy wszystkich, toiest, do Graniastosłupa pięciokątnego, iak podstawa tróykątna pierwszego, do

fummy podftáw wfzyftkich, toieft do podftawy Graniaftoflupa pięciokątnego.

Podobnie też i każdy inny Graniaftoflup iednakiey wysokości, takby się miał do Graniaftoflupa tróykątnego : ADE eda, iak podftawa iego do podftawy tróykątney ADE.

Więc (złożywszy ftósunki) będzie ftósunek iakiegokolwiek Graniaftoflupa do Graniaftoflupa ABCDE edcba, równy stósunkowi podftawy pierwszego Graniaftoflupa, do podftawy ABCDE; (a to wtedy, gdy wysokości tych dwóch Graniaftoflupów są równe.)

W szczególności zaś, gdy Równoległościán i Graniaftoflup iakikolwiek równe mieć będą podftawy i wysokości; bryłowatość iednego; równá będzie bryłowatości drugiego.

A zatem cokolwiek się o Równoległościanach powiedziało; można to i do Graniaftoflupow iakichkolwiek przystósować, co do wielkości ich, ilé te zawifły od ich podftáw i wysokości. Można przeto do iakichkolwiek Graniaftoflupów przystósować wniofki, co do Graniaftoflupów tróykątnych w fzczególności, które po Twierdzeniu 2gim tego Rozdziału następuią.

Ró-

ROZDZIÁŁ VI.

O Piramidach albo Ostrosłupach.

90. *DEfin:* Niech punkt iaki znáyduie się nad płaszczyzną Figury iakiéykolwiek prostokréślnéy; przez tén punkt i przez wszystkié boki Figury, niecháy przechodzą płaszczyzny; zrobi się stąd Bryła kończącá się z jednéy strony na téy Figurze, a z jnnych stron, na tylu Tróykątach maiących spólny wiérzchołek w owym punkcie, ilé ta Figura má boków. Bryła ta nazywá się *Ostrostupém* (Pyramis.) powiérzchnią Ostrosłupa możná sobie wystawić iakoby zrobioną ruchém nici przywiązanéy iednym końcém do punktu znáyduiącégo się nad płaszczyzną Figury, a drugim końcém wyciągnionym obrácaiącéy się około obwodu téyże Figury. Figura prostokréślná, któréy boki służą za podstawy Tróykątów kończących Ostrosłup, nazywá się *podstawą* ostrosłupa, té Tróykąty nazywaią się iego *ścianami*; punkt który iest wiérzchołkiém spólnym wszystkich ścián Ostrosłupa, nazywá się *wiérzchołkiém* iego. Prostopadłá spuszczoná od tego wiérzchołka, na płaszczyznę podstawy, zowié się *wysokością* Ostrosłupa.

Ostrosłup różné przybiérá nazwiska, podług wielości boków podstawy swo-
iéy.

iéy. Nazywá się tróykątnym, czworokątnym, pięciokątnym, sześciokątnym i t. d. gdy podſtawa iego ieſt Tróykątém, Czworokątém, Pięciokątém, Sześciokątém i t. d.

Tén Oſtrosłup nazywać będziémy *proſtym*, którégo podſtawą ieſt Figura proſtokréślná mogącá się na kole opisać; i gdy proſtopadłéy spuszczonéy od wiérzchołka tego Oſtrosłupa, drugi koniec przypádá na śrzodek tego koła.

W takim Oſtrosłupie wysokość wszyſtkich ścián ieſt iednakowá, i tych ścián płaszczyzny równie są nachylóné do płaszczyzny podſtawy.

W Oſtrosłupie, którégo podſtawą ieſt Figura proſtokréślná mogącá się wpisać w koło, a którégo wysokość wychodzi od śrzodka tego koła, wszyſtkié krawędzie ścián są równé, a zatém wszyſtkié té ściany są Tróykątami równoramiénnémi. Ale że śrzodek koła opisanégo na podſtawie, może czasém za tę podſtawę wychodzić, dlá tego, takowégo Oſtrosłupa nié można nazywać proſtym.

Żeby iednak nazwiſko to Oſtrosłupa proſtégo (pospolicie do tych czas nie doſtatecznie określoné) ogólnieyszém uczynić, przydámy naſtępuiący warunek.

Gdy

Gdy w Figurze prostokréślnéy znáyduie się taki punkt, przez który ciągnione linije, a po obudwóch stronach na obwodzie Figury zakończone, dzielą się w tym punkcie na dwie równé części, tén punkt nazywá się śrzodkiém Figury.

I tak punkt przecięciá przekątnych w Równoległoboku, ieſt tego Równoległoboku śrzodkiém. Jeżeli tedy Figura proſtokréślná maiącá taki śrzodek, służy za podſtawę Oſtrosłupowi, i ieżeli proſtopadłá od wiérzchołku iego spuszczoná przypádá na tén śrzódek Figury, taki Oſtrosłup nazwiémy także proſtym.

Oſtrosłup proſty nazywá się *forémnym*, gdy za podſtawę má Figurę proſtokréślną forémną.

91. *Twiérdz*: 1. Przeciąwszy Oſtrosłup płaszczyzną równoodległą od podſtawy iego; przecięcié to będzie Figurą podobną do podſtawy.

Niech będzie Oſtrosłup SABCDE, maiący wiérzchołek w punkcie S, a którego podſtawą ieſt Figùra proſtokréślná ABCDE. Niech tén Oſtrosłup przeciná płaszczyzna równoodległá od podſtawy, przecięcié to abcde będzie podobné do podſtawy.

Táb. IV. *Fig.* 3.

Po-

Ponieważ płaszczyzna podſtawy równoodległá ieſt od płaszczyzny przecinaiącéy; będą téż i przecięciá ścián, spólné z témi płaszczyznami, równoodległé iedné względém drugich; więc wszyſtkié boki przecięciá n. p. ab, bc równoodległé będą względém boków AB, BC podſtawy; a zatém i wszyſtkié kąty przecięciá, równé będą względém kątów podſtawy, n.p. kąt abc, równy będzie kątowi ABC. Jeſt tedy przecięcié równokątné z podſtawą.

Tróykąty SAB, sab są podobné; więc Sb: SB = ab: AB.

Tróykąty téż, Sbc, SBC podobné; więc: Sb : SB = bc : BC; a zatém ab: AB = bc : BC.

Więc przecięcié i podſtawa, maią około kątów względém siebie równych, boki proporcyonalné, a zatém przecięcié podobné ieſt do podſtawy.

W szczególności zaś, przecięcié takié, i podſtawa, maią się do siebie w ſtósunku dwumnożnym boków ich, odpowiadaiących sobie; albo są do siebie w ſtósunku dwumnożnym liniy n.p. Sb, SB; albo na koniec w ſtósunku dwumnożnym ich odległości od wiérzchołka S, Oſtrosłupa, maiącéy się wymierzać przez proſtopadłą spuszczoną od tego wiérzchołka, do

ich

ich płaszczyzn; tak dalece, że przeciąwszy Ostrosłup płaszczyznami równoodległemi od podstawy, a w takich od wierzchołka odległościach, aby te miały się do siebie, iak liczby 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. powierzchnie tych przecięciów będą do siebie iak liczby 1, 4, 9, 16, 25, i t. d. (Obacz Jeometryi Części I. Rozdz: IX.)

Uwága. Tego Podaniá częste iest w Fizyce używanie; i dlá tego trzeba ie iak náyiaśniey uczniom wyłożyć, i o gruntownem iego zrozumieniu od nich bydź przeświadczonym.

92. *Wniosek* 1. Niech będą dwa Ostrosłupy z jednakową wysokością, i podstawami znáyduiącemi się na teyże samey płaszczyznie. Gdy te Ostrosłupy przetniemy płaszczyznami równoodległemi od ich podstáw, przecięciá odpowiadaiące sobie, tak się mieć do siebie będą, iak podstawy tych Ostrosłupów; a w szczególności, gdy te podstawy równe będą, wszystkie też przecięciá iednego Ostrosłupa będą równe przecięciom odpowiadaiącym drugiego.

93. *Wniosek* 2. Z tego co się powiedziało o równości Graniastosłupów maiących iednaką wysokość i równe podstawy, a stoiących na teyże samey płaszczyznie, iako też i o proporcyonalności tych Graniastosłupów z ich podstawami

wami, gdy te przy równych wysokościach, są nie równe; możnáby mniemać, że też i Ostrosłupy maiące równe wysokości i podstawy, są równe, i że gdy równe maią wysokości, będą do siebie iak ich podstawy.

Następuiące Twierdzenia zamienią to mniemanie w pewność, gdy ich dowody przytoczymy.

94. *Twierdzenie przybrane.* Niech będzie Ostrosłup Tróykątny przecięty płaszczyznami równoodległemi od podstawy, i w jednakowey od siebie odległości zostaiącemi. Na podstawie, i na każdem przecięciu wystawmy ku wierzchołkowi Ostrosłupa, Graniastosłupy, z których każdy miałby wysokość równą odległości dwóch płaszczyzn nayblizszych. Na tychże przecięciach, wystawmy znowu inne Graniastosłupy ku podstawie, z tą samą, co pierwsze, wysokością. Niech każdy z tych Graniastosłupów má iednę krawędź spolną z Ostrosłupem, i dwie ściany na tychże płaszczyznach co i dwie krawędzie Ostrosłupa. Różnica summy wszystkich pierwszych Graniastosłupów (które nazwę opisanemi) od summy drugich (które nazwę wpisanemi) równá będzie pierwszemu Graniastosłupowi opisanemu, który iest wystawiony na podstawie Ostrosłupa.

Niech

Niech będzie Ostrosłup Tróykątny SABC, którégo wiérzchołek S, a podsta-wa ABC. Táb. IV. *Fig.* 4.

Podzielmy tén Ostrosłup na części n.p. 5, płaszczyznami równoodległémi od podstawy, i w jednakowéy od siebie odległości zostaiącémi. Niech będą: $A^1 B'C'$ $A^2B^2C^2$ $A^3B^3C^3$ $A^4B^4C^4$ przecięciá Ostrosłupa, przez té płaszczyzny. Na podstawie i na wszystkich przecięciach Ostrosłupa wystáwmy ku iego wiérzchołkowi Graniastosłupy, kończącé się na przecięciu náybliższym; té będą opisanémi na Ostrosłupie, bo ich ściany występować będą za ściany Ostrosłupa. Wystáwmy znowu na tychże przecięciach ku podstawie, inné Graniastosłupy téyże saméy co piérwszé wosokości; té będą wpisanémi w Ostrosłup, bo za ściany ich, będą wychodzić ściany Ostrosłupa. Różnica między summą piérwszych i drugich Graniastosłupów, równać się będzie Graniastosłupowi opisanému, wystawionému na podstawie Ostrosłupa.

Wykreśl: Podzielmy linie AB, AC, na 5 równych części, w punktach: b',b^2, b^3,b^4, c',c^2,c^3,c^4. i pociągniymy linie; $b'c'$, b^2c^2, b^3c^3, b^4c^4.

Tróykąty: Ab^1c', Ab^2c^2, Ab^3c^3, Ab^4c^4, będą równé względem Ostrosłupa przecięciów: $A^1B^1C^1$, $A^2B^2C^2$, $A^3B^3C^3$, $A^4B^4C^4$. Ró-

Różnica między Graniaſtosłupém opisanym a ſtoiącym na podſtawie ABC, i między Graniaſtosłupém wpisanym a ſtoiącym na podſtawie $A^1B^1C^1$ równá się Graniaſtosłupowi téyże saméy co tamté wysokości, maiącému za podſtawę, różnicę tamtych dwóch podſtáw, toieſt Czworokąt BCc^1b^1.

Podobnie i różnica między Graniaſtosłupém opisanym, a ſtoiącym na przecięciu $A^1B^1C^1$, i między Graniastosłupém wpisanym a ſtoiącym na przecięciu $A^2B^2C^2$ równá się Graniaſtosłupowi, téyże saméy co oné wysokości, maiącému za podſtawę, różnicę tamtych dwóch podſtáw, toieſt Czworokąt $b^1c'b^2c^2$.

Także różnicę dwóch pár Graniaſtosłupów naſtępuiących, równé są Graniaſtosłupóm, téyże co oné wysokości maiącym za podſtawy Czworokąty $b^2c^2b^3c^3$ i $b^3c^3b^4c^4$.

Oſtatni zaś Graniaſtosłup opisany, równá się Graniaſtosłupowi, téyże co on wysokości maiącému za podſtawę Tróykąt Ab^4c^4.

Różnica tedy między summą wszyſtkich Graniaſtosłupów opisanych, a summą wszyſtkich Graniaſtosłupów wpisanych, równá będzie summie wszyſtkich Graniaſtosłupów téyże co oné wysokości, któréby

ſtały

stały na Czworokątach BC $c'b'$, $b'c'c^2b^2$, $b^2\ c^2\ c^3b^3$, $b^3\ c^3\ c^4b^4$, i na Tróykącie Ab^4c^4, toiest: równá będzie Graniastosłupowi tróykątnému téyże co oné wysokości, a maiącému za podstawę Tróykąt ABC. Ta więc różnica równá się w samey rzeczy piérwszému Graniastosłupowi opisanému.

95. *Wniosek.* Piérwszy tén Graniastosłup opisany na Ostrosłupie SABC, którégo podstawa ABC, nie odmiéniá się, będzie tym mnieyszy, im mnieyszą dámy mu wysokość, toiest: im liczba przecięć Ostrosłupa będzie większá. Możná zaś uczynić tén Graniastosłup mnieyszym od iakiégokolwiek Graniastosłupa naznaczonégo, zamiéniaiąc tén ostatni Graniastosłup na inny, któryby miał za podstawę Tróykąt ABC i dzieląc wysokość daną Ostrosłupa, na tylé części równych aby każdá z nich była mnieyszá od wysokości tego Graniastosłupa tak przerobionégo.

Maiąc więc dany Ostrosłup, możná wéń wpisać, i opisać na nim sposobém wyżéy wyrażonym, tylé Graniastosłupów, aby różnica dwóch summ, mnieyszá była od iakiégokolwiek Graniastosłupa naznaczonégo, a tym bardziéy, aby różnicá Ostrosłupa od iedney z tych summ mnieyszá była od iakiégokolwiek Graniastosłupa naznaczonégo.

96. *Twierdz.* 2. Dwa Ostrosłupy tróykątne maiące równe wysokości i podstawy, są równe.

Gdyby te dwa Ostrosłupy nie były równe, tedy daymy, że ieden z nich byłby większy od drugiego. Niechby więc ta mniemaná ich różnica zamieniona była na Graniastosłup maiący równą z temi Ostrosłupami podstawę. Podzielmy wysokość iednego z tych Ostrosłupa na tyle części równych, aby każda z nich mnieysza była od wysokości tego Graniastosłupa. Wpiszmy w ten Ostrosłup i opiszmy na nim Graniastosłupy sposobem wyrażonym w poprzedzaiącym Twierdzeniu przybranym. Toż uczyńmy i na drugim Ostrosłupie; wszystkie Graniastosłupy wpisane, i opisane, na tych dwóch Ostrosłupach, będą równe iedne względem drugich (87, 88) a zatem summa Graniastosłupów wpisanych n p. w jeden Ostrosłup będzie równa summie Graniastosłupów wpisanych w drugi Ostrosłup. Że zaś zrobiliśmy różnicę dwóch summ Graniastosłupów wpisanych i opisanych na pierwszym Ostrosłupie, mnieyszą od różnicy mniemaney dwóch Ostrosłupów, więc tym bardziey różnica tego Ostrosłupa od summy wszystkich Graniastosłupów weń wpisanych, mnieysza będzie, od różnicy mniemaney tych dwóch Ostrosłupów; a zatem i różnica pierwszego Ostrosłupa, od summy Graniastosłupów

wpi-

wpisanych w drugi Ostrosłup, mnieyszá będzie, niż różnica pierwszego Ostrosłupa od drugiego. Summa tedy Graniastosłupów wpisanych w tén drugi Ostrosłup, byłaby większá od tego drugiego Ostrosłupa, co bydź nie może; a przeto té dwa Ostrosłupy nie mogą sobie bydź nierówne.

97. *Twierdz:* 3. Graniastosłup tróykątny, może zawsze bydź rozłożony na trzy Ostrosłupy tróykątne równe, z których dwa mieć będą tę samę podstawę i wysokość, co i Graniastosłup.

Niech będzie Graniastosłup tróykątny ABCEF, możná go rozłożyć na trzy Ostrosłupy tróykątne równe, z których dwa, tę samę, co on mieć będą podstawę i wysokość. Táb. IV. *Fig.* 5.

Przez bok AC, podstawy ABC, Graniastosłupa, i przez koniec F, krawędzi tego Graniastosłupa nie przechodzącéy, przez punkta: A i C, przeciągniymy płaszczyznę ACF; odetnie ona od Graniastosłupa, Ostrosłup tróykątny FABC, maiący za wiérzchołek, punkt F, a za podstawę. Tróykąt: ABC; a zatém tén Ostrosłup, tę samę co i Graniastosłup mieć będzie podstawę i wysokość.

Podobnie i przez bok EF, ściany przeciwnéy podstawie, i przez punkt C, przeciągniymy płaszczyznę ECF; odetnie

ona

ona od Graniastosłupa, Ostrosłup tróykątny: CEDF, maiący za wierzchołek, punkt C, a za podstawę Tróykąt DEF, równy Tróykątowi: ABC, a zatém i tén drugi Ostrosłup má tę samę także co i Graniastosłup, podstawę i wysokość.

Więc dwa Ostrosłupy: FABC, CDEF równé maią, wysokości, i podstawy, a zatém są równé (96) Zostanie ieszcze po tych dwóch przecięciach, Ostrosłup CFEA, zakończony cztérema Tróykątami ACF, ACE, AEF, ECF.

Wystáwmy sobie, tén ostatni Ostrosłup iako maiący za podstawę, Tróykąt np. ACE, a za wierzchołek, punkt F, Ostrosłup zaś CEDF, iakoby miáł za podstawę, Tróykąt; CDE, a za wierzchołek ténże punkt F. Przekątna CE, Równoległoboku ACDE, dzieli go na dwa Tróykąty, które przystać do siebie mogą; więc té dwa Ostrosłupy maią podstawy równé, ACE, DEC i na iedney płaszczyznie znáyduiącé się; a oprocz tego, maią spólny wierzchołek w punkcie F, a zatém i wysokość równą; więc są równé; wszystkié tedy trzy Ostrosłupy, na które Graniastosłup był podzielony, są równé.

Wzaiémnie Ostrosłup Tróykątny, można zawsze sobie wystawić, iako trzecią część Graniastosłupa maiącégo tę samę

co

co i Ostrosłup podstawę, i wysokość.

Niech będzie Ostrosłup tróykątny: ABCF; którégo podstawa ABC, a wiérzchołek F.

Na téyże podstawie ABC, wystáwmy sobie iakoby zbudowany Graniastosłup, ABCDEF, którégo dwie ściany ABFE, BCDF znáydowałyby się na tych samych płaszczyznach, na których znayduią się dwie ściany Ostrosłupa, i krawędź im spólná BF. Podług Twiérdzéniá poprzedzaiącégo, tén Graniastosłup iest trzy razy tak wielki, iak Ostrosłup; więc téż i tén Ostrosłup iest trzecią częścią tego Graniastosłupa. A że wszystkié Graniastosłupy maiącé równé podstawy i wysokości, są równé; więc Ostrosłup tróykątny iest trzecią częścią Graniastosłupa iakiégokolwiek, maiącégo taką samę iak on podstawę i wysokość.

98. *Twiérdz:* 4. Ostrosłup iakikolwiek iest trzecią częścią Graniastosłupa maiącégo tę samę co on podstawę, i wysokość.

Dowodz: Jakażkolwiek będzie podstawa Ostrosłupa, poprowádźmy na niéy przekątnych tylé do wszystkich kątów, ilé można. Przez té wszystkié przekątné, i przez wiérzchołek Ostrosłupa niech przechodzą płaszczyzny; Ostrosłup będzie

przez té płaszczyzny podzielony na tyle Oſtrosłupów tróykątnych, na ilé Tróykątów podſtawa była podzieloná przez przekątné; każdy z tych Oſtrosłupów tróykątnych, będzie trzecią częścią Graniaſtosłupa maiącégo taką samę iak on podſtawę, i wysokość; a zatém summa wszyſtkich tych Oſtrosłupów tróykątnych, toiest cały iakikolwiek Oſtrosłup z nich się składaiący, równać się będzie trzeciéy części, summy wszyſtkich tych Graniaſtosłupów, albo co na iedno wychodzi, równać się będzie trzeciéy części Graniaſtosłupa maiącégo tę samę podſtawę i wysokość, co i Oſtrosłup.

99. *Wnioski.* Cokolwiek się o ſtósunku Graniaſtosłupów powiedziało, toż mówić możná i o ſtósunku Oſtrosłupów, które maiąc takié samé iak i té Graniaſtosłupy, podſtawy, i wysokości, są trzeciémi względém nich częściami.

1. Dwa Oſtrosłupy iakiékolwiek (proſté lub ukośné, foremné lub nie forémné) z równémi wysokościami, tak się do siebie maią, iak ich podſtawy.

2. Dwa Oſtrosłupy z równémi podſtawami, tak się do siebie maią, iak ich wysokości.

3. Dwa Oſtrosłupy są równé, gdy ich podſtawy są w ſtósunku odwrótnym ich wysokości. 4.

4. Dwa Ostrosłupy równé, maią podstawy w stósunku odwrótnym ich wysokości, i wyráz liczebny bryłowatości Ostrosłupa będzie znaleziony, gdy się weźmie trzecia część dwóch liczb rozmnożonych, z których iedna znaczyłaby wielkość powiérzchni podstawy tego Ostrosłupa, a drugá, wielkość iego wysokości.

100. *Uwága.* Maiąc dané w liczbach sześć krawędzi iakiégo Ostrosłupa tróykątnégo, można wyznaczyć bryłowatość tego Ostrosłupa.

Jakoż złożywszy Tróykąt z trzech takowych krawędzi, i uważaiąc go iak podstawę Ostrosłupa; a na trzech bokach téy podstawy, zrobiwszy trzy Tróykąty, na téyże samèy, co i podstawa płaszczyznie, dáwszy każdému z nich za boki, po dwie krawędzie z trzech pozostałych; té Tróykąty będą ścianami Ostrosłupa. Kąt każdy bryłowy przy podstawie, składać się będzie, z kąta Tróykąta wziętégo za podstawę, i z dwóch kątów ścián dwóch przy podstawie. Ponieważ zaś té kąty są wiadomé, więc będzie można wyznaczyć pochyłość ścián do podstawy, a w szczególności będzie można wyrachować stósunek wysokości Ostrosłupa, do spólnégo przecięciá tych dwóch ścián. A że to spólné przecięcie iest dané co do wielkości, więc doy-

 dziémy

dziémy i wysokości Oſtrosłupa, a zatém i iego bryłowatości, która zawisła od wysokości Oſtrosłupa, i powiérzchni iego podſtawy.

101. *Uwága* 2. Możná tę bryłowatość wyznaczyć i bez Trygonometryi, iako się to pokáże w Algiebrze.

102. *Uwága* 3. Gdy Oſtroſłup proſty, ieſt forémny, a zatém trzy ścián iego krawędzie są równé; Kwadrat wysokości Oſtroſłupa, równá się rożnicy kwadratu iednéy krawędzi, od kwadratu promiénia koła na podſtawie opisanégo. A przeto ta wysokość może bydź bardzo łatwo w liczbach wyznaczoná, bez pomocy Trygonometryi. Tén zaś sposób postępowaniá przyſtósować možná do wszyſtkich Oſtroſłupów forémnych, iakáżkolwiek byłaby liczba ich boków w podſtawie.

Przykł: 1. Wyznaczyć bryłowatość Bryły nazwanéy *Czworościanem* (Tetraedrum.)

Bok iedén Troykąta równobocznégo wyznaczywszy przez liczbę 2. kwadrat wysokości tego Tróykąta wyrazi się przez liczbę 3. Promień koła opisanégo ieſt $\frac{2}{3}$ téy wysokości, więc kwadrat tego promiénia, ieſt $\frac{4}{9}$, kwadratu wysokości

Tróy-

Tróykąta, a zatém kwadrat tego promiénia wyráżá się przez $\frac{12}{9}$. Że zaś kwádrat wysokości tego Ostrosłupa iest $4-\frac{12}{9}$ $=\frac{24-4\times6}{9.\quad9}$ więc sama wysokość będzie $=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Powiérzchniá Tróykąta służącégo za podstawę wyrazi się przez $\sqrt{3}$, a zatém bryłowatość Ostrosłupa będzie wyráżoná przez $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; toiest bryłowatość Ostrosłupa tak się má do bryłowatości Sześcianu równégo; co do boków Ostrosłupowi, iak $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ do 8, albo iak $\sqrt{2}$ do 12; albo iak 2 do $12\sqrt{2}$, albo iak 1 do $6\sqrt{2}$; albo nakoniec iak 1 do $\sqrt{72}$; który to stósunek blizki iest stósunku 2 do 17, albo 33 do 280, a bardzo mało różni się od stósunku 68 do 577.

Przykł: 2. Wyznaczyć bryłowatość Ośmiościanu forémnégo.

Można sobie Ośmiościán wystawić w myśli, iakoby złożony z dwóch Ostrosłupów prostych kwadratowych, stykaiących się z sobą równémi podstawami.

Wyrá-

Wyráziwszy bok ieden Ośmiościanu tego, przez 2, kwadrat promienia koła opisanego na podstawie iednego z tych dwóch Ostrosłupow, będzie wyrażony przez 2, a kwadrat wysokości tego Ostrosłupa wyrazi się przez różnicę między kwadratem z 2, toiest 4, i 2, toiest będzie $=4-2=2$. Wysokość zaś tego Ostrosłupa wyrazi się przez $\sqrt{2}$; więc bryłowatość iednego tego Ostrosłupa będzie oznaczona przez $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. a zatem bryłowatość Ośmiościanu przez $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. Jest tedy bryłowatość Ośmiościanu foremnego do bryłowatości Sześcianu rownego co do wielkości boków, iak $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ do 8, albo iak $\sqrt{2}:3$, który to stósunek blizki iest stósunkowi 8 do 17, albo 17 do 36, a bardzo mało różni się od stósunku 33 do 70.

103. *Uwága* 3. Ponieważ ściany Ostrosłupa są powierzchniami płaskiemi i to ieszcze tróykątnemi, wyznaczenie iego powierzchni, żadney nie podlegá trudności. Gdy Ostrosłup iest prosty, powierzchnia iego (oprocz podstawy) rówwná będzie Tróykątowi, któryby miał za podstawę, obwód podstawy Ostrosłupa; a wysokość równą wysokości ściany któreykolwiek (ponieważ wszystkie są równe.) *Wybo-*

Wyboczénie (Digressio) *O SPOSOBIE WYCZERPANIA nazwanego po Łacinie* Methodus exhaustionis; *maiące stużyć za wstęp do Rozdziałów następuiących.*

104. Sposób, którego się użyło dlá dowiedzienia równości dwóch Ostrostupów, których podstawy i wysokości są równé, na to wypádá, aby okázać, iż każdy z tych Ostrostupów zawarty iest między dwiéma ilościami, których różnica może bydź mnieyszá od iakiéykolwiek ilości naznaczonéy; toiest: że każdy Ostrostup iest zawarty między summą Graniastostupów na nim opisanych, i summą Graniastostupów weń wpisanych; i że tych dwóch summ różnica może bydź mnieyszá od iakieykolwiek ilości naznaczonéy; a tym bardziéy każdego z tych Ostrostupa różnica, od iednéy z tych summ, może bydź mnieyszá, niż iakákolwiek ilość naznaczoná. Skąd można było Ostrostupóm porównywanym do siebie przystósować to wszystko, cokolwiek się powiedziało o stósunku, iednéy z tych summ, n p. summy Graniastostupów opisanych na iednym Ostrostupie, do drugiéy z tych summ, toiest do summy Graniastostupów w jednakiéy liczbie, opisanych na drugim Ostrostupie. Że zaś, gdy Ostrostupy miały równé podstawy i wysokosci, té dwie summy Graniastostupów były równé; więc też i Ostrostupy, których różnica od

tych

tych dwóch ſumm może bydź mnieyszá, niż iakákolwiek ilość naznaczoná, będą rowné.

105. Gdyby dwa Ostrosłupy miały tylko wysokości równé, a podstawy nierówné; możnáby tymże samym prawie ſposobém okazać, że są do siebie, iak ich podstawy; a to stądby się wniosło, że w tymże samym stósunku byłyby do siebie ſummy Graniastosłupów, opisanych na każdym z tych Ostrosłupów; i że każdy z tych Ostrosłupów może się różnić od każdéy z tych ſumm, odpowiadaiących ſobie, ilością mnieyszą, niżeli iest iakákolwiek ilość naznaczoná.

106. Ponieważ tén sposób wnoszéniá, stósunku dwóch ilości, ktoré bezśrzednié z ſobą porównywać iest trudno, będzie bardzo często używany w Rozdziáłach następuiących, przeto nie zawadzi okázać ieszcze pewność iego na kilku przykładach, aby iuż potém nie trzeba było za każdym razém powtárzać całégo ciągu takowégo działaniá, który zawsze iest iednakowy.

Przykł: 1. Niechby dowiedziono było, że dwa Równoległoboki maiące równé wysokości, są do siebie, iak ich podstawy. Trzeba ieszcze dowieśdź, że i dwa Tróykąty, których równe są wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy.

wy. (W tém zaś stawiamy się mniemaniu, iakoby nam nie wiadomo było, że Tróykąt iest połową Równoległoboku, téyże co on podstawy i wysokości:)

Niech będą dwa Tróykąty: ABC, abc. równey wysokości, a z nie równemi podstawami; trzeba dowieśdź że się tak maią do siebie, iak ich podstawy; a to stąd, że i Równoległoboki iednakiéy wysokości są do siebie, iak ich podstawy.

Táb. IV. *Fig.* 6.

Podzielmy bok ieden n p. AC, na pewną liczbę części równych. Przez wszystkie punkta podziału poprowádźmy równoodległe od podstawy; a na każdéy z tych równoodległych wpiszmy i opiszmy Tróykątowi ABC, Równoległoboki, maiące za społną wysokość równe oddalénie dwóch naybliższych równoodległych.

Różnica Równoległoboków opisanych, od Równoległoboków wpisanych, równać się będzie naywiększému z nich Równoległobokowi. Ta zaś różnica może bydź mnieyszą zrobioná, niż iakikolwiek Równoległobok naznaczony, odmieniwszy go na inny Równoległobok, któryby tę samę, co i Tróykąt miał podstawę, i kąt z nim przy podstawie społny, a potém podzieliwszy drugi bok AC, Tróykąta na tyle części równych, aby każda z nich mnieysza była od drugiego boku, Równoległoboku naznaczonego.

Gdy-

Gdyby to bydź mogło, aby dwa Tróykąty: ABC, abc, nie miały się do siebie, iak ich podstawy; tedy ieden z tych Tróykątow; n p. ABC, byłby do uczynienia tego stósunku, nadto wielki, lub nadto mały.

Niechby więc, ieżeli to bydź może, trzeba powiększyć Tróykąt ABC, Równoległobokiem ABFE, aby się tak miał do Tróykąta abc, iak AB do ab.

Podzielmy bok AC, na tyle części równych, aby każda z nich mnieyſza była od linii AE; wpiſzmy potem i opiſzmy Tróykątowi Równoległoboki, w ſposób wyżey wyrażony. Niech będzie naywiękſzy z nich Równoległobok AGHB. Różnica ſummy Równoległoboków opisanych od ſummy Równoległoboków wpiſanych, uczyniona iest mnieyſzą, niżeli Równoległobok ABFE; tym bardziey zaś różnica ſummy Równoległoboków opisanych, na Tróykącie ABC, od tegoż Tróykąta, ABC, mnieysza będzie, niżeli Równoległobok ABFE; a zatem ſumma wſzystkich Równoległoboków opiſanych, mnieyſza iest od Równoległoboku ABFE, wraz wziętego z Troykątem ABC.

Podzielmy i bok ac, Tróykąta abc, na tyleż części równych, na ile ich był podzielony bok AC; opiſzmy na tym Tróykącie Równoległoboki, tak iak wyżey.

Ro-

Równoległoboki opisane, na tych dwóch Tróykątach, a odpowiadaiące sobie, tak się mieć będą do siebie, iak podstawy AB, ab, tychże Tróykątów; więc też i summa wszystkich Równoległoboków opisanych na Tróykącie ABC, tak się mieć będzie do summy Równoległoboków opisanych na Tróykącie abc, iak podstawa AB, pierwszego Tróykąta, do podstawy ab, drugiego; toiest: przez przypuszczénie, iak summa, z Tróykąta ABC, i z Równoległoboku ABFE, do Tróykąta abc. A że zrobiliśmy pierwszy poprzednik mnieyszym od drugiego, więc też i pierwszy następnik bydźby powinién mnieyszy od drugiego; toiest summa wszystkich Równoległoboków opisanych na Tróykącie abc, powinnáby bydź mnieyszá od Tróykąta abc, co iednak bydź nié może; a zatém stósunek podstaw tych dwóch Tróykątów, ténże sám iest, co i samych Tróykątów.

Podobnym sposobém możnáby okázać, że i drugi Tróykąt abc, nie powinién bydź powiększony, aby miał tén sám do Tróykąta ABC, stósunek, co i ich podstawy.

Przykł: 2. Niech Tróykąty ABC, abc, wystawuią dwóch Ostrosłupów przecięcia przechodzącé przez wierzchołki C, c, i przez prostopadłe spuszczone od tych wierzchółków do podstaw Ostrosłupów.

Niech

Niech te obadwa Ostrosłupy, będą iednakiey wysokości. Trzeba dowieśdź że bryłowatości tych Ostrosłupów, tak się maią do siebie, iak ich podstawy, a to z własności Graniastosłupów iednakowey wysokości, które także w takim iak ich podstawy stosunku są do siebie, czego się iuż wyżey dowiodło.

Okáże się, w podobny sposób, że opisáwszy i wpisáwszy iednému z tych Ostrosłupowi, Graniastosłupy, równey wszystkie wysokości; różnica wpisanych od opisanych, równać się będzie náywiększému Graniastosłupowi opisanému, i że można w to potrafić, aby ta różnica mnieyszá była niż iakikolwiek Graniastosłup naznaczony; a tym bardziey różnica Ostrosłupa od każdey z tych summ mnieyszá będzie, niżeli tén Graniastosłup.

Wpisáwszy i opisáwszy drugiému Ostrosłupowi, tylé co i pierwszému Graniastosłupów; summa tych wszystkich Graniastosłupów opisanych na pierwszym Ostrosłupie, tak się mieć będzie do summy opisanych na drugim, iak podstawa pierwszégo Ostrosłupa, do podstawy drugiégo. Także i summy Graniastosłupów wpisanych, w tym samym stósunku będą, co i podstawy dwóch Ostrosłupów.

Gdyby to albowiém bydź mogło, aby stósunek dwóch tych Ostrosłupów, nie-

nierówny był stósunkowi ich podstáw, tedy ieden z tych Ostrosłupów, byłby n.p. nadto mały na ten stósunek. Przydáymy mu więc tę ilość, którą powiększony, zachowá ten stósunek, i zamieńmy też ilość na Graniastosłup równey z nim podstawy. Temu Ostrosłupowi wpiszmy i opiszmy Graniastosłupy iednakiey wysokości, tak iednak małey, aby różnica summ Graniastosłupów wpisanych od opisanych, mnieyszá była od różnicy naznaczoney; będzie tym bardziey różnica summy Graniastosłupów opisanych na tym Ostrosłupie, od tegoż Ostrosłupa mnieyszá, niżeli różnica naznaczoná; a zatem summa tych Graniastosłupów mnieyszá będzie niżeli summa z Ostrosłupa i z różnicy naznaczoney.

Na drugim Ostrosłupie opiszmy tyleż, co i na pierwszym Graniastosłupów.

Summa wszystkich Graniastosłupów opisanych na pierwszym Ostrosłupie, tak się mieć będzie do summy Graniastosłupów opisanych na drugim Ostrosłupie, iak podstawa pierwszego Ostrosłupa, do podstawy drugiego; toiest: iak summa z pierwszego Ostrosłupa, i z różnicy iego mniemaney, do drugiego Ostrosłupa.

A że się pokazało, iż pierwszy poprzednik mnieyszy iest od drugiego, więc i pierwszy następnik powinienby bydź mniey-

mnieyszy od drugiego, co iednak bydź nie może.

Więc stósunek dwóch tych Ostrosłupów, nie różni się od stósunku ich podstáw.

107. *Uwága.* Użyliśmy iuż tego sposobu, mówiąc o kwadrowaniu koła, w Części I. Dowiódłszy albowiém, iż obwody dwóch Wielokątów forémnych, z jednaką liczbą boków, wpisanych, lub opisanych, dwóm kołom, tak się do siebie maią, iak tych kół promiénie; pokazáwszy oráz, iż różnica obwodu koła, od obwodu Wielokąta wpisanégo, lub opisanégo, mnieyszą bydź może od iakiéykolwiek ilości naznaczonéy, wywiedliśmy stąd proporcyonalność okręgów kół, do ich promiéni. Dowiedliśmy także równości koła z Tróykątém maiącym za wysokość promiéń iego, a za podstawę, okrąg; a to z podobnéy własności Wielokątów na kole opisanych.

W którymkolwiek z tych przykładów, n. p. w ostatnim okrąg koła iest granicą między obwodami Wielokątów wpisanych i opisanych, do któréy każdy z nich, tym bardziey się zbliżá, im więcéy boków mu dámy, tak dalece, że przyiśdź można do tego, iż ich obwody różnić się od siebie będą mnieyszą ilością, niż iakákolwiek ilość naznaczoná, a tym mniey ieszcze różnić się będą ich

obwo-

obwody od okręgu koła. Toż samo mówić można i o ich powierzchniach. Obwody Wielokątów podobnych na dwóch kołach opisanych, zawsze tę maią własność, iż są proporcyonalnémi tychże kół promieniom. Łącząc té z sobą własności, wypadło z nich, że i granice między Wielokątém i kołém, też samę własność maią; lubo choćby go na więcéy coraz cząstek podzielić (byleby ich liczba była skończona) nie przyidziémy nigdy do tego, abyśmy cale zgubili tę różnicę, która zachodzi między Wielokątém, i kołém; toiest: abyśmy Wielokąt cale na koło iému rowné zamiénili.

Tén sposób postępowania, nazywa się *sposobém wyczérpania* (Methodus exhaustionis) używanym bardzo często u dawnych, którym się to, i sprawiedliwie nie zdawało, aby liniie krzywé uważać iak złożoné z liczby bardzo wielkiéy, maleńkich liniy prostych; powiérzchnie zaś krzywé, aby uważać iak zbiór bardzo wielu powiérzchni płaskich, małości nadzwyczaynéy; bryły także krzywé, aby uważać iak *Wielościany* (Polyedra) bardzo wielką liczbę ścian maiącé.

Po tych, którė się tu dały obiaśniéniach, obeydzie się w następuiących podaniach, bez powtarzania za każdym razém całégo ciągu tego sposobu *wyczérpania*.

paniá. Dosyć będźie okázać, że powierzchnie krzywé i bryły niémi zakończoné, o których mámy mówić, zawarté zawsze są między powiérzchniami lub bryłami, o których iuż mówiliśmy, a które mogą się różnić od siebie mnieyszą ilością, niż iakakolwiek ilość podaná. Gdy zaś przyidzie mówić o ściánach brył, i o ich *warstach* (laminæ) i t.d. tedy rozumiém, że przez poprzedzaiącé obszerné obiaśniénia, dosyc się wytłumaczyło, iak dalecy bydź powinniśmy od uważaniá powiérzchni krzywych, iakoby złożonych z płaszczyzn, i od uważaniá brył, iakoby złożonych z powiérzchni usłanych iednych nad drugiémi.

ROZDZIÁŁ VII.

O Walcach.

180. Niech będą dwa koła równé nakréślone na dwóch płaszczyznach równoodległych. Przez liniią łączącą ich śrzodki, niech przechodzi iakakolwiek inná płaszczyzna. Niech będą złączoné inną liniią końce dwóch promiéni znáydujących się po iedney stronie linii łączącey śrzodki, i służących za spólné przecięciá tey płaszczyzny z płaszczyznami dwóch kół; niechay ta liniiá końce dwóch promiéni łącząca obracá się równym

wnym wszystkich iey punktów ruchém, około okręgów tych dwóch kół. Powierzchnia krzywa obrotém tym linii naznaczona, nazywa się *Powierzchnią walcową*. Bryła zakończona témi dwoma kołami, i tą powierzchnią zowie się *Walcém* (Cylinder:) Liniia prosta łącząca środki tych dwóch kół, nazywa sią *Osią* tego Walca. (Axis) Dwa koła na których się Walec kończy, nazywaią się iego *podstawami*. Prostopadła spuszczona od punktu którégokolwiek, iedney z tych podstaw do płaszczyzny podstawy drugiey, nazywa się *wysokością* Walca. Gdy oś Walca, albo liniia łącząca środki dwóch podstaw iego, prostopadłą iest do płaszczyzn podstaw, Walec zowie się *prostym*, gdy zaś ta oś iest pochyłą do tychże płaszczyzn, wtedy Walec zowie się *ukośnym*.

109. *Wniosek*. Liniia robiąca obrotém swoim powierzchnią walcową, równoodległą iest w początkowém swoiém położeniu, od osi walca (bo ta liniia z osią, czyni dwa boki przeciwne w Czworokącie tym, którego dwoma innémi bokami, są dwa promienie kół, równe i równoodległé). Że zaś ta liniia zawsze iest od pierwszégo swégo położenia równoodległą, więc zawsze będzie równoodległą od osi. Wzaiémnie, gdy przez punkt którykolwiek powierzchni walcowey pociągniémy liniią, równoodległą

od osi, ta liniiá zmiészá się z liniią, którá obrotém swoim kréśli powierzchnią Walca, a przez ténże punkt przechodzi, i całá ta liniiá znáydowáć się będzie na powiérzchni walcowéy. Liniiá równoodległá od osi, a przechodzącá przez punkt którykolwiek powiérzchni walcowéy, nazywá się *bokiém* Walca; wszyſtkié zatém boki Walca są równé, a w szczególności równaią się osi.

110. *Twiérdz:* 1. Przeciąwszy Walec płaſzczyzną równoodległą od podstawy, przecięcié to będzie kołém.

Táb. V. *Fig.* 1. Niech będzie CA ac, połową przecięciá Walca, od płaſzczyzny przechodzącéy przez oś iego Cc, i niech BD będzie ſpólném przecięciém téy płaſzczyzny, i drugiéy równoodległéy od podstawy.

Przecięcié Walca przez tę drugą płaſzczyznę, będzie kołém.

Dowodz: Bok Aa, Walca iest od osi Cc równoódległym; przecięciá także BD, CA płaſzczyzny przechodzącéy przez oś, i dwóch płaſzczyzn równoodległych, są równoodległémi; więc Czworokąt; ACBD, iest Równoległobokiém, a zatém bok BD, równá się bokowi AC.

Tymże ſposobém okázáć možná równość wſzystkich liniy prowadzonych od pun-

punktu B, do każdego punktu przecięciá powierzchni Walcowey, przez płaszczyznę równoodległą od podstawy; a zatem to przecięcie iest kołem, którego śrzodkiem, punkt B; i wszystkie takie przecięciá są sobie równe, a w szczególności, równe są podstawie.

111. *Wniosek.* Stąd wyniká inny sposób, którym wystawić sobie można *rodzénié się* (generatio) iakiekolwiek Walca, toiest przez ruch koła taki, którymby się to koło w równey zawsze od pierwszego swego położeniá odległości posuwało, a ieden z punktów iego nie schodził nigdy z linii prostey daney co do iey położeniá.

W szczególności zaś Walec prosty, można uważać iakoby zrobiony obrotem Równoległoboku prostokątnego, około iednego z boków iego.

112. *Twierdz:* 2. Powierzchniá krzywá Walca prostego, równá się Prostokątowi, któryby miał za podstawę, okrąg podstawy Walca, a za wysokość, bok Walca.

Dowodz: Wpiszmy w podstawę Walca, i opiszmy na niey dwa Wielokąty foremne, z równą liczbą boków, i na tych Wielokątach, iak na podstawach, uważáymy iakoby zrobione Graniastosłupy pro-

ste, teyże co i Walec wysokości; powierzchnie pobocznych ścian tych dwóch Graniastosłupów równe będą względem Prostokątów maiących wysokość Walca; podstawy zaś równe obwodóm tych Wielokątów, a zatem te dwie powierzchnie pobocznych ścian Graniastosłupów, tak się mieć do siebie będą, iak obwody tychże Wielokątów: Tym mniey więc różnić się od siebie będą te dwie powierzchnie, im mniey brakować będzie obwodóm tych Wielokątów do równości, toiest, im większa liczba będzie ich boków; i różnica tych powierzchni mieysca bydź może, niż iakakolwiek ilość naznaczona; a tym barydziey powierzchnia krzywa Walca może się mniey ieszcze różnić od iedney z tamtych powierzchni; więc (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania, i w Rozdziale XIII. Części I.) powierzchnia krzywa Walca prostego, równa się Prostokątowi maiącemu wysokość tego Walca, a podstawę równą okręgowi podstawy iego.

113. *Wnioski* 1. Powierzchnie krzywe Walców prostych, iednakiey wysokości, tak się do siebie maią, iak promienie ich podstaw.

2. Powierzchnie krzywe Walców prostych maiących równe podstawy, są do siebie, iak ich wysokości.

— 3.

3. Powiérzchniá całá Walca prostégo, równá się Prostokątowi maiącému za podstawę okrąg podstawy Walca, a za wysokość summę z wysokości Walca, i z promiénia podstawy iego, (ponieważ summa z powiérzchni dwóch podstáw Walca, równá iest Prostokątowi maiącému za podstawę okrąg, a za wysokość, promiéń iednéy z tych podstáw). Jest zatém powiérzchniá całá Walca prostégo proporcyonalná Prostokątowi, któryby miał za boki, promiéń podstawy Walca, i summę z tegoż promiénia z wysokości walca; (gdyż stósunek okręgu do promiénia, iest iednostaynym.)

114. *Uwága.* Można okázać, iż wyznaczénié powiérzchni krzywéy Walca ukośnégo, zawisło od wyznaczéniá obwodu przecięciá Walca tego, przez płaszczyznę prostopadłą do iego osi; ale że wyznaczénié tego obwodu, większéy niż początkowéy Jeometryi wiadomości wyciągá, przeto nié może bydź przez nię wyznaczoná i powiérzchniá krzywá walca ukośnégo.

115. *Twiérdz:* 3. Dwa Walce równé są w bryłowatości, których tak podstawy iako i wysokości, są równé.

Dowodz: wpisáwszy, i opisáwszy podstawóm tych dwóch Walców, Wielokąty forémné, o iednakowéy liczbie boków,

ków, a zrobiwszy na tych Wielokątach, Graniastosłupy równéy z walcami wysokości, maiącé ściany równoodległé względem osi tych Walców; rożnica Graniastosłupa opisanégo na iednym z tych Walców, od Graniastosłupa w ténże Walec wpisanégo, równać się będzie Graniastosłupowi maiącému tę samę, co tamté dwa wysokość, a podstawę równą różnicy dwoch ich podstáw. A że różnica tych dwóch podstáw, mnieyszá bydź może, niż iakákolwiek iłość naznaczoná; więc téż i różnicę dwóch Graniastosłupów, wpisanégo i opisanégo, można uczynić mnieyszą od iakieykolwiek ilości naznaczonéy, a tém bardziéy różnica iednégo z tych Graniastosłupa, od Walca może bydź mnieyszą uczynioná, niż iakákolwiek ilość naznaczoná.

Że zaś dwa Graniastosłupy których podstawy są podobné n. p. opisané na tych dwóch Walcach są równé, więc téż i té dwa Walce są równé, (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczérpaniá. w Rozdz: XII. Części I.)

116. *Twiérdzénié* 4. Walce z równémi podstawami, maią się do siebie, iak ich wysokości.

117. *Twiérd:* 5. Walce z równą wysokością maią się do siebie, iak ich podstawy.

Do-

Dowodzénié tych dwóch Twiérdzéń to samo iest prawie, co i dowodzénié Twiérdzéniá 3; położywszy ſtósunki nierówności podſtáw, lub wysokości, na mieyscé ſtósunków ich równości. (Kart. 127 i naſtępuiących.

118. *Wnioſki.* Cokolwiek się powiedziało o porownywaniu Graniaſtoſłupów maiacych podſtawy rożnégo gatunku, wſzyſtko to przyſtósowáć można do porownywániá Walców z Graniaſtoſłupami. Walec równy na przykład iest iakiémukolwiek Graniaſtoſłupowi maiącému równą z nim podſtawę i wysokość. Walec tak ſię má do Graniaſtoſłupa téyże co on wysokości, iak podſtáwa tego walca, do podſtawy Graniaſtoſłupa, a zatém Walec tak się má do Graniaſtoſłupa téyże co i on wysokości, a którégo podſtawa ieſt Wielokątém opisanym na podſtawie Walca, iak podſtáwa Walca, do podſtawy Graniaſtoſłupa, toieſt, iak obwód podſtawy Walca, do obwodu podſtawy Graniaſtoſłupa; n.p. Walec, którégo wysokość równá się śrzednicy podſtawy iego, tak się má do Sześcianu téy śrzednicy, iak okrąg koła, do téyże śrzednicy wziętéy 4 razy.

Gdy Walec równy ieſt Graniaſtoſłupowi w bryłowatości, wysokość ich będzie w ſtósunku odwrotnym podſtáw, i znowu, ieżeli wysokości są w ſtósunku odwro-

odwrotnym podſtáw, tedy Walec równá ſię Graniaſtoſłupowi.

Stósunek dwóch Walców, może podobnie, iák i ſtósunek Graniaſtoſłupów, wyłożonym bydź w liniiach ſposobém następuiącym: Wyraźmy w liniiach ſtósunek ich podſtáw; znalazłszy trzecią proporcyonalną do promiénia Walca piérwszégo, i do promiénia Walca drugiégo. Do wysokości Walca piérwszégo, do wysokości drugiégo, i do téy trzeciéy proporcyonalnéy, ſzukáymy czwártéy proporcyonalnéy; ſtósunek promiénia Walca piérwszégo, do téy czwártéy proporcyonalnéy, równy będzie ſtósunkowi bryłowatości piérwſzégo Walca, do bryłowatości drugiégo.

Przykład liczebny. Niech będzie promiéń podſtawy drugiégo Walca, trzy razy tak wielki iak promiéń podſtawy piérwszégo; wysokość zaś drugiégo Walca, niech będzie cztéry razy tak wielká, iak wysokość piérwszégo. Trzeciá proporcyonalná do promiénia Walca piérwſzégo i do promiénia Walca drugiégo, będzie 9 razy tak wielká, iak promiéń piérwſzégo Walca; a ponieważ wysokość drugiégo Walca, 4 razy ieſt tak wielká iak wysokość piérwſzégo, będzie więc czwártá proporcyonalná do wysokości piérwſzégo Walca, do wyſokości drugiégo, i do téy trzeciéy proporcyonalnéy,

néy, cztéry razy tak wielká, iak ta trzeciá proporcyonalná, toieſt: 36 razy tak wielká iak piérwszy promién, a zatém drugi Walec zawiérá w sobie piérwſzy, razy 36. Jakoż gdyby podſtawa drugiégo Walca zawiérała w ſobie razy 9 podſtawę piérwſzégo, a wyſokość ich była równá, tedy drugi Walec byłby 9 razy tak wielki iak piérwſzy; a że nadto wysokość drugiégo Walca zawiérá w ſobie razy 4, wysokość pierwszégo, będzie więc i z téy miary drugi Walec 4 razy tak wielki, iak piérwszy, a z obudwóch razém tych miár będzie 36 razy tak wielki, iak piérwszy.

Co się zaś tycze miary liczebnéy iakiégo Walca, ta będzie znalezioná, wyraziwszy naprzód w liczbach, powiérzchnią iego podſtawy (podług tego co się powiedziało o powiérzchni koła,) a potém rozmnożywszy tę liczbę przez inną, oznaczaiącą wysokość Walca.

119. *Uwága.* Wyznaczénié dokładné tak powiérzchni krzywéy Walca proſtégo, iako też i całéy iego powiérzchni; toieſt: dokładné porównywanié tey powiérzchni z powiérzchnią figury płaſkiéy proſtokréślnéy, n.p. z kwadratém, zawiſło od ſkwadrowaniá koła; a zatém od wyproſtowaniá iego okręgu. Toż mówić i o bryłowatości Walca, czyli o dokładnym porownywániu téy bryłowatości z bryłowatością n.p. Sześcianu. Wy-

Wyznaczénié wielkości kawałków Walca, maiących za podſtáwy, wycinki, lub odcinki koła, zawisło także od wyznaczéniá Walca; ponieważ té kawałki tak się maią do Walca całégo, którégo są częściámi, iak ich podſtawy do koła ſłużącégo za podſtawę témú Walcowi. (g)

ROZDZIÁŁ VIII.

O Ostrokręgach.

120. *Defin*: Niech będzie koło nakréślo-né na iakiéy płaszczyznie i niech od punktu nad tą płaſzczyzną znáyduiącégo się, wyciągnioná liniiá lub nitka, obrácá się około okręgu tego koła. Powiérzchniá krzywá obrotém tym linii lub nitki naznaczoná nazywá się *powiérzchnią Oſtrokręgu*; Bryła zakończoná przez tę powiérzchnią i koło, około którégo nitka się obrácała, nazwiémy *Oſtrokręgiém* (Conus), koło, na którém Oſtrokrąg

---

(g) Lubo niektóré części powiérzchni Walcowéy samé przez się wyznaczyć można; nié można iednak wyznaczyć ich stósunku do całéy powiérzchni Walca. Toż mówić i o częściach Walca, których bryłowatości mogą bydź wyznaczoné. Ale ta rzecz bardziéy iest ciekawá, niż użyteczná, dlá tego téż dosyć iest o tém namiénić.

krąg stoi, nazwiémy *podstawą* iego; *wiérzchołkiém* zaś, punkt tén, od którégo nitka była wyciągnioná. Liniiá od tego wiérzchołku do śrzodka podstawy prowadzoná, nazywá się *Osią* Ostrokręgu, a prostopadłá spuszczoná od wiérzchołku do płaszczyzny podstawy: nazywá się *wysokością*. Gdy oś iest prostopadłą do płaszczyzny podstawy Ostrokręgu; Ostrokrąg nazywá się *prostym*; gdy zaś ta oś nie iest do płaszczyzny podstawy prostopadłą, Ostrokrąg nazywá się *ukośnym*.

121. *Wniosek.* Poprowadziwszy liniią od wiérzchołku Ostrokręgu, do ktoregokolwiek punktu Okręgu podstawy iego, ta liniiá zmiészá się wtedy z nitką rodzącą obrotém swoim, powiérzchnią Ostrokręgu, gdy ta nitka przechodzić będzie przez tén punkt okręgu podstawy; a zatém ta liniiá całá będzie na powiérzchni krzywéy tego Ostrokręgu.

Liniiá poprowadzoná od wiérzchołku Ostrokręgu na powiérzchni iego krzywéy, aż do okręgu podstawy, nazywá się *bokiém* Ostrokręgu.

122. *Twiérdz:* 1. Gdy płaszczyzna przechodzącá przez wiérzchołek Ostrokręgu iakiégożkolwiek przeciná go, przecięcié to, iest zawsze Tróykątém.

Do-

Dowodz: Liniie poprowadzoné na téy płaszczyznie od wiérzchołku Ostrokręgu, do dwóch punktów okręgu, w których go ta płaszczyzna przeciná, będą bokami Ostrokręgu, i spólnémi powiérzchni iego krzywéy, z tą płaszczyzną przecięciami; a zatém przecięcié Ostrokręgu przez tę płaszczyznę, będzie Tróykątém maiącym za podstawę, spólné przecięcié téy płaszczyzny, z płaszczyzną podstawy Ostrokręgu, a za boki, dwie liniie poprowadzoné od wiérzchołku, do punktów przecięciá okręgu, od płaszczyzny przechodzącéy przez wiérzchołek.

123. *Twiérdz*: 2. Gdy Ostrokrąg przecięty iest przez płaszczyznę równoodległą od iego podstawy, przecięcié to, iest kołém.

Táb. V. *Fig.* 2.

Niech Tróykat ASB wyráżá iakiékolwiek przecięcié Ostrokręgu od płaszczyzny przechodzącéy przez iego oś, SC; niech liniiá DFE wyráżá spólné przecięcié téy płaszczyzny i innéy równoodległéy od podstawy.

Tróykąty SCB, SFE, są podobné; więc SC: CB = SF: FE. A że płaszczyzna przecinaiącá Ostrokrąg równoodlegle od podstawy, przechodzi przez punkt nieruchomy F, a przeto trzy piérwszé wyrazy téy proporcyi są stałé iakiżkolwiek będzie

dzie promień podstawy przez którą, a razém i przez oś przechodzi płaszczyzna; więc téż i czwárty wyráz iest stałym. Poprowadziwszy tedy liniie od punktu F, do okręgu przecięciá té liniie równé zawsze będą, a zatém to przecięcié iest kołém, którégo punkt F, iest śrzodkiém.

124. *Wnioski.* Té kół powiérzchnie tak się do siebie maią, iak kwadraty ich promiéni, albo iak kwadraty odległości ich od wiérzchołka. (To podanié iest wielce przydatné w Fizyce.)

Gdy Ostrokrąg iest prostym; wtedy wszystkié płaszczyzny, równoodległé od pódstawy, są do Osi prostopadłémi; a stąd, można uważać Ostrokrąg prosty, iakoby zrobiony obrotém Tróykąta prostokątnégo, około iednégo z ramion kąta iego prostégo. To ramié będzie Osią Ostrokręgu, drugié, naznaczy powiérzchnią podstawy, przeciwprostokątná zaś, naznaczy powiérzchnią krzywą Ostrokręgu.

125. *Twiérdz: przybrané 1.* Gdy liniiá poprowadzoná na płaszczyznie podstawy Ostrokręgu, dotyká się téy podstawy; płaszczyzna przez tę liniią i przez bok Ostrokręgu do punktu dotknięciá, ciągniony, przechodzącá, wszystkié inné punkta swoié mieć będzie za Ostrokręgiém, toiest: nic spólnégo z Ostrokręgiém

giém nie będzie miała, oprócz boku, przez który przechodzi.

Táb. V. Fig. 3. Niech będzie SCA, przecięcié Oſtrokręgu od płaſzczyzny przechodzącéy przez Oś SC, i przez podſtawy promień CA. Niech AT, będzie ſtyczną z tą podſtawą, w końcu A, promienia CA; Płaſzczyzna przechodzącá przez liniie: SA, AT, będzie mieć za Oſtrokręgiem, wſzyſtkié punkta ſwoié, które nie ſą w linii SA.

Dowodz: Niech płaſzczyżna iakákolwiek równoodległá od podſtawy, Oſtrokrąg przeciná; niech *ca*; będzie ſpólném przecięciém téy płaszczyzny, i drugiéy przez oś przechodzącéy; niech ieſzcze *at* będzie przecięciém teyże płaſzczyzny, i drugiéy przechodzącéy przez liniie: SA, AT. Liniie *ca*, *at*, będą równoodległémi względém liniy: CA, AT; a zatém kąt *cat*, będzie równy kątowi CAT. A że kąt CAT ieſt proſtym, więc proſtym także będzie i kąt *cat*; a zatém, oprócz punktu *a*, linii *at*, każdy inny punkt, téyże linii, będzie w większéy od środka *c*, odległości, niżeli promień *ca*, toieſt: niżeli odległość punktu na powiérzchni Oſtrokręgu, i oráz na płaſzczyznie *cat*, znáyduiącégo się, od punktu Osi, do teyże płaſzczyzny należącégo. Każdy tedy inny punkt téy linii *at*, oprócz punktu *a*, ieſt za okręgiém.

126.

126. *Defin:* O téy płaszczyznie mówi się, iż się *dotyká Ostrokręgu*, która iednę tylko liniią má spólną z powiérzchnią krzywą Ostrokręgu.

127. *Wniosek.* Opisáwszy Wielokąt na podstawie Ostrokręgu, a przez wiérzchołek tego Ostrokręgu, i przez boki Wielokąta przeciągnąwszy płaszczyzny; ponieważ té boki Wielokąta opisanégo, służyć będą za podstawy ścián Ostrogranu, wiérzchołek zaś iego, będzie ten sám, co i wiérzchołek Ostrokręgu; więc ściany tego Ostrogranu dotykać się będą powiérzchni Ostrokręgu. Ostrográn ten nazywá się opisanym na Ostrokręgu: inny zaś, któryby spólny z Ostrokręgiem miał wiérzchołek, a za podstawę Wielokąt wpisany w podstawę Ostrokręgu, nazywałby się w Ostrokrąg *wpisanym.*

128. *Twiérdz: przybrané 2.* Maiąc dany Ostrokrąg prosty, można weń wpisać, i opisać na nim dwa Ostrograny forémné, którychby stósunek powiérzchni ściénnych bardziéy się zbliżał do stósunku równości, niż iakikolwiek naznaczony stósunek nierówności.

Powiérzchnie ściénné tych dwóch Ostrogranów, równaią się tróykątóm, maiącym za podstawy, obwody podstáw Ostrogranów, a wysokości zaś, równé wysokościóm iednéy ze ścián każdégo Ostro-

Oſtrogranu; a zatém tak się do siebie maią té Oſtrograny, iak té dwa Tróykąty. A że podſtawy tych dwóch Tróykątów, tak się maią do siebie, iak proſtopadłé ſpuſzczoné od śrzodku, do dwóch którychkolwiek boków podſtáw Oſtrogranu; więc té powiérzchnie ściénńé, tak się téż do siebie mieć będą, iak Tróykąty równéy z ścianami Oſtrogranów wyſokości, a maiącé za podſtawy, té proſtopadłé; albo iak Proſtokąty, téyże z dwiéma témi Tróykątami podſtawy i wysokości. Że zaś ſtóſunek takich dwóch Proſtokątów, może bydź bardziéy przybliżonym do ſtósunku równości, niż iakikolwiek dany ſtósunek nierówności; to się tak dowodzi.

Táb. V. *Fig. 4.* Niech będzie SCA, przecięcié Oſtrokręgu proſtégo, od płaſzczyzny przechodzącéy przez oś tego Oſtrokręgu i przez wysokości SA, SB, dwoch ścián Oſtrogranów foremnych, i maiących za podſtawy, Wielokąty z równą liczbą boków; iedén z tych Oſtrogranów niech będzie opiſanym na Oſtrokręgu, a drugi wéń wpiſanym.

Powiérzchniá ściénna Oſtrogranu opiſanégo proporcyonalná ieſt z Proſtokątém CA przez SA, a powiérzchniá ściennä Oſtrogranu wpiſanégo, proporcyonalná ieſt Proſtokątowi CB, przez SB. Poprowádźmy BD równoodległą od SA.

Po-

Powierzchniá ściénná Ostrogranu, maiącégo za podstawę, podstawę Ostrogranu wpisanégo, a za wysokość liniią CD, takby się miała do powiérzchni ściénnéy, Ostrogranu opisanégo, iak Prostokąt: CB×BD do Prostokąta CA×AS; toiest (dlá podobiéństwa Tróykątów SAC, DBC) iak kwadrat z CB, do kwadratu z CA; albo iak powiérzchnie podstáw, dwóch Ostrogránów. A że się dowiodło w Rozdziele o kwadrowaniu koła w Części I. że té dwie powiérzchnie bardziéy mogą bydź zbliżonémi do stósunku równości, niż iakikolwiek dany stósunek nierówności; więc też i stósunek powiérzchni ściénnych, tych dwóch Ostrogranów, bliższy może bydź stósunku równości, niż iakikolwiek dany stósunek nierowności. Że zaś powiérzchniá ściénná Ostrogranu, którégo SCA iest przecięciém, mniéy się różni od Ostrogranu, którégo przecięciém iest: SCB, niżeli od Ostrogranu, którégo przecięciém iest: DCB; więc tém bardziéy stósunek powiérzchni ściénnych dwóch Ostrogranów, iednégo wpisanégo, drugiégo opisanégo na Ostrokręgu prostym danym mniéy się różnić może od stósunku równości, niżeli od tegoż stósunku różni się iakikolwiek dany stósunek nierówności.

129. *Twiérdz:* 3. Powiérzchniá krzywá Ostrokręgu prostégo, równá się Tróykątowi maiącému za podstawę obwód

 pod-

podstawy Ostrokręgu, a za wyfokość bok Ostrokręgu.

Dowodz: Powierzchniá krzywá Ostrokręgu prostego, iest granicą między powierzchniami ściennemi Ostrogranów prostych weń wpisanych i na nim opisanych. A że stósunek takich dwóch powierzchni Ostrogranów, może bydź do stósunku równości bardziey przybliżonym, niżeli iakikolwiek dany ftósunek nierówności; więc tém bardziey ftósunek powierzchni Oftrokręgu proftego, do powierzchni iednego z tych Oftrogranów, n. p. opisanego mniey się różnić może od ftósunku równości, niżeli się od tegoż ftósunku rożni iakikolwiek dany ftósunek nierówności. Że zaś powierzchniá ściénná Oftrogranu opisanego, równá się Tróykątowi maiącému za wysokość, bok Oftrokręgu, a za podftawę obwód podftawy, tego Oftrogranu; więc (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczérpániá, a w szczególności w Rozdziele o kwadrowaniu koła, że powierzchniá koła, równá się Tróykątowi maiącému za podftawę obwód koła, a za wysokość, promień iego): Powierzchniá krzywá Oftrokręgu proftego, ieft też równá Tróykątowi, któryby miał za podftawę obwód podftawy Oftrokręgu, a za wysokość bok iego.

130. *Wniosek.* Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego, równa się wycinkowi koła, któreby miało za promień, bok Ostrokręgu, a którego łuk równyby był w długości okręgowi podstawy Ostrokręgu; a to dla tego, że powierzchnia tego wycinku, równa się także Tróykątowi, maiącemu za wysokość bok Ostrokręgu, a za podstawę łuk tego wycinku, albo okrąg podstawy Ostrokręgu.

131. Dla znalezienia ważności kątowey, tego wycinku, następuiąca czyni się proporcya: Jak się ma bok Ostrokręgu, do promienia podstawy iego, tak się ma 360° do ważności kątowey, którey szukamy.

Jakoż, gdyby bok Ostrokręgu, był dwa, trzy, i t. d. razy większy od promienia podstawy; tedy okrąg cały maiący za promień bok Ostrokręgu, byłby dwa, trzy i t. d. razy większy od okręgu podstawy: a zatem i łuk pierwszego koła, któryby się równał okręgowi podstawy, byłby połową, trzecią częścią i t. d. okręgu, do którego należy.

132. *Defin:* Niech będzie Ostrokrąg przecięty płaszczyzną równoodległą od podstawy iego; Bryła zakończona z jedney strony, podstawą Ostrokręgu a z drugiey tem przecięciem, nazywa się *Ostrokręgiem ściętym* (Conus truncatus.)

133. *Twierdz*: 4. Powierzchniá krzywá Ostrokręgu prostego ściętego, równá się Prostokątowi maiącemu za wysokość, bok tego Ostrokręgu ściętego, a za podstawę liniią równą takiemu okręgowi, którego promieniem byłaby połowa summy promieni do dwóch podstáw Ostrokręgu tegoż ściętego należących toiest: śrzedniá arytmetyczna między dwoma temi promieniami.

Táb. V. *Fig*: 5. Niech Tróykąt SCA, wyráżá połowę przecięciá Ostrokręgu prostego, od płaszczyzny przechodzącey przez oś iego. Niech tenże Ostrokrąg będzie ieszcze przecięty płaszczyzną równoodległą od Podstawy, a spólnem tey płaszczyzny z pierwszą przecięciem, niech będzie: *ca*. Przecięcie: CAac, oznaczy przecięcie Ostrokręgu ściętego. Pociągniymy liniią AB, prostopadłą do boku SA, i równą okręgowi koła, którego promieniem iest: CA. Tróykąt SAB, będzie równy powierzchni krzywey Ostrokręgu całego: poprowádźmy ieszcze liniią *ab*, równoodległą od AB, i spotykaiącą w punkcie *b*, liniią SB. Ta liniiá *ab*, będzie też równá okręgowi koła, którego, promieniem iest: *ca*, a Tróykąt Sab, równać się będzie powierzchni krzywey Ostrokręgu Sac; będzie zatem Czworokąt ABba, równy powierzchni krzywey Ostrokręgu ściętego ca CA.

Po-

Podzielmy teráz liniią Aa, na dwie części równe w punkcie: E, i poprowádźmy EF, równoodległą od AB.

Ta liniiá EF, będzie równá okręgowi koła, którego promień równałby się linii: ED, toieſt śrzedniey Arytmetyczney między promięniami CA, i *ca*, dwóch podſtáw Oſtrokręgu ściętego; a przeto powierzchniá Czworokąta ABba, równá się Proſtokątowi AHGa, maiącemu za wysokość, bok Aa, Oſtrokręgu ściętego, a za podstawę liniią EF równą okręgowi śrzednie arytmetycznie proporcyonalnemu, między okręgami dwóch podſtáw tegoż Oſtrokręgu.

134. *Uwága* 1. Wyrażenie naſtępuiące powierzchni krzywey Oſtrokręgu proſtego, czyli to całego, czyli też ściętego, poſłuży nám, gdy mówić będziemy o powierzchni *kuli* (Sphæra).

Od śrzodku E, linii Aa, wyciągniymy liniią EI proſtopadłą do Aa, ſpotykaiącą oś SC, w punkcie I. Poprowádźmy i drugą liniią aL, równoodległą od SC, a proſtopadłą do AC.

Summa kątów IED, DEa, równá się kątowi proſtemu; tak iako i ſumma kątów: AaL, DEa; więc te dwie ſummy są ſobie równe; a zatem kąt IED, równá się kątowi AaL. Są tedy podobne, dwa

Tróy-

Tróykąty prostokątné: IED, AaL, a zatém boki ich będą proporcyonalné; więc, JE: ED=Aa: aL, (albo Cc) a stąd i okręgi, maiącé za promiénie, liniie: IE, ED, są też do siebie, iak liniie: Aa, Cc; a zatém prostokąt z linii Cc, przez okrąg, którégo liniiá IE, byłaby promiéniém, równáłby się Prostokątowi z linii Aa, przez okrąg, któryby miáł za promiéń, liniią ED. A że tén drugi Prostokąt równy iest powiérzchni krzywéy Ostrokręgu ściętégo; więc też i piérwszy byłby równy téyże Ostrokręgu ściętégo powiérzchni. Jest tedy powiérzchniá krzywá Ostrokręgu ściętégo, równá Prostokątowi maiącému wysokość równą wysokości Ostrokręgu ściętégo, a podstawę równą okręgowi takiégo koła, którégo promiéniém byłaby prostopadłá, od śrzodku boku Ostrokręgu ściętégo wyciągnioná, aż do iego osi, którá to prostopadłá iest czwártą Jeometrycznie proporcyonalną, do wysokóści Ostrokręgu ściętégo, do iego boku, i do śrzedniéy arytmetycznéy między dwoma promiéniami; co wszystko łatwo przystósować możná i do Ostrokręgu całégo.

135. *Uwága* 2. Wyznaczénié więc dokładné powiérzchni Ostrokręgu prostégo lub iéy części zawartéy między płaszczyznami równoległémi od iego podstawy, zawisło od wyprostowaniá okręgu koła.

Co

Co się tycze Ostrokręgu ukośnego, ieszcze cięższy iest wyznaczyć powierzchnią iego krzywą, niżeli Walca ukośnego; to zaś pochodzi z nierowności iego boków, a zatem z nierówności ścian Ostrogranów, z podstawami foremnemi, opisanych lub opisać się mogących na tym Ostrokręgu.

136. *Twierdz: przybrané* Bryłowatości dwóch Ostrogranów z podstawami foremnemi, iednego wpisanego w Ostrokrąg, a drugiego na nim opisanego, różnica może bydź mnieysza, niż iakakolwiek ilość naznaczona; toiest stósunek ich bryłowatości, może bardziey bydź przybliżonym do stósunku równości, niż iakikolwiek dany stósunek nierówności.

Dowodz: Różnica tych dwóch Ostrogranów, równa się Ostrogranowi teyże co one wysokości, a którego podstawa byłaby równa różnicy ich podstáw. A że stósunek tych podstáw, może bydź bardziey przybliżonym do stósunku równości, niż dany iakikolwiek inny stósunek nierówności, więc też i stósunek tych dwóch Ostrogranów, może się zbliżyć do stósunku równości bardziey niż inny dany iakikolwiek stósunek nierówności. Zamieniwszy różnicę dwóch Ostrogranów, na trzeci Ostrogran teyże co one wysokości, można będzie wpisać i opisać podstawie Ostrokręgu dwa Wielokąty,

z ró-

z równą liczbą boków, takie, którychby różnica mnieyſzá była od podſtawy tego trzeciego Oſtrogranu, a tém bardziey ieden z Oſtrogranów wyſtawionych na tych Wielokątach, równey z Oſtrokręgiém wyſokości, mniey się różnić będzie od Oſtrokręgu, niż iakąkolwiek ilością naznaczoną.

137. *Twierdz:* 5. Bryłowatość iakiegokolwiek Oſtrokręgu, ieſt trzecią częścią bryłowatości Walca równey z Oſtrokręgiém podſtawy i wyſokości.

Dowodz: Oſtrograny i Graniaſtoſłupy *iednoimienne* (ejusdem nominis) wpiſane, lub opiſane, pierwſze na Oſtrokręgu, a drugie na Walcu, iednakiey z nimi wyſokości, ſą trzecią częścią pierwſze względem drugich. A że te Oſtrograny i Graniaſtoſłupy mogą się różnić pierwſze od Oſtrokręgu, drugie od Walca, na którym ſą n. p. opiſane, mniey niż iakąkolwiek daną ilością; więc (podług tego, co się powiedziało o ſpoſobie wyczérpaniá) Oſtrokrąg ieſt też trzecią częścią Walca.

138. *Wnioſek.* Cokolwiek mówiliśmy o porównywaniu Walców, zawisłym od ich wyſokości, i podſtaw, można to wſzyſtko i do Oſtrokręgów przyſtoſować, które trzecią ich ſą częścią; podobnie iakośmy i to co się mówiło o porownywaniu Graniaſtosłupów, do Oſtrogranów przyſtóſowali. J tak.

1. Ostrokręgi, których podstawy są równe, maią się do siebie, iak ich wysokości.

2. Ostrokręgi, których wysokości są równe, maią się do siebie, iak ich podstawy.

3. Ostrokręgi, których bryłowatości są równe, maią podstawy w stósunku odwrotnym ich wysokości.

4. Ostrokręgi, których podstawy maią się do siebie, w stósunku odwrotnym ich wysokości, są równe.

5. Stósunek dwóch Ostrokręgów w liniiach wyrażony, tak się znáyduie: zamieniá się stósunek podstawy iednégo, do podstawy drugiégo na stósunek linii do linii; znáyduiąc trzecią proporcyonalną do promienia podstawy pierwszégo Ostrokręgu, i do promienia podstawy drugiégo. Zamieniá się także stósunek wysokości pierwszégo Ostrokręgu, do wysokości drugiégo, na stósunek trzeciéy proporcyonalnéy znalezionéy, do czwártéy. Stósunek promienia podstawy pierwszégo Ostrokręgu, do téy czwártéy proporcyonalnéy, równy będzie stósunkowi pierwszégo Ostrokręgu, do drugiégo.

6. Wyrażénié liczebné bryłowatości Ostrokręgu znáyduiémy, mnożąc liczbę ozna-

oznaczaiącą wielkość powiérzchni podstawy iego, przez liczbę oznaczaiacą wielkość wyfokości, a potém téy liczby rozmnożonéy biorąc część trzecią.

Wyznaczénié tedy dokładné bryłowatości Ostrokręgu, zawisło od wyznaczéniá dokładnégo, iego podstawy, a zatém od wyprostowaniá okręgu koła.

Bryłowatość Ostrokręgu, równá się bryłowatości iakiégokolwiek Ostrogranu, równéy z Ostrokręgiém wyfokości i podstawy.

139. *Twiérdz: 6.* Bryłowatość Ostrokręgu prostégo, równá się bryłowatości Ostrokręgu innégo, którégo powiérzchniá podstawy byłaby równá, powiérzchni całéy Ostrokręgu prostégo, a wyfokość, równá promiéniowi koła wpifanégo w Tróykąt równoramiénny wyrażaiący przecięcié Ostrokręgu prostégo, od płafzczyzny przez oś iego przechodzącéy.

Niech będzie ASB przecięcié Ostrokręgu prostégo, od płafzczyzny przez oś iego przechodzącéy.

Táb. V. *Fig. 6.* Niech będzie SC prostopadłá do AB, wysokością, czyli osią tego Ostrokręgu. Podzielmy ieden z kątów przy podstawie AB, n. p. kąt A, na dwie równé części, przez liniią AD, i prowádźmy ią aż

aż do punktu D, prostopadłéy SC; od tegoż punktu D, niech idzie prostopadłá DE do SA. Linie równé DC, DE, będą promiéniami, koła wpisanégo w Tróykąt przechodzący przez oś Ostrokręgu.

Powiérzchniá podstawy Ostrokręgu, tak się má do iego powiérzchni krzywéy, iak AC, do AS; a zatém powiérzchniá podstawy, tak się mieć będzie do całéy powiérzchni Ostrokręgu, iak AC do AC+AS, albo iak AC^2 do AC (AC+AS); więc powiérzchniá cała Ostrokręgu równá się kołu maiącému za promiéń śrzednią Jeometryczną między promiéniém AC podstawy Ostrokręgu, i summą z tego promiénia i z boku Ostrokręgu. A że liniiá AD, dzieli kąt CAS na dwie równé części; więc AS: AC = SD: CD; i AS + AC: AC = SD + CD: CD; a na koniec (AS+AC) AC: AC^2 = SC: CD.

Więc Ostrokrąg maiący za promiéń podstawy, śrzednią Jeometryczną między $\overline{AC, \text{ i } AC+AS}$, a za wysokość liniią CD, miałby podstawę swoię, do podstawy Ostrokręgu podanégo, w stósunku odwrotnym wysokości; a zatém té dwa Ostrokręgi byłyby równé. Że zaś podstawa piérwszego Ostrokręgu iest równá całéy powiérzchni Ostrokręgu podanégo; więc bryłowatość Ostrokręgu prostégo, równá się bryłowatości Ostrokręgu innégo maiącégo podstawę równą całéy prosté-

stégo Ostrokręgu powiérzchni, a wyſokość równą promiéniowi koła wpisanégo w Tróykąt, który iest przecięciém tego Ostrokręgu od płaſzczyzny przechodzącéy przez oś iego.

ROZDZIÁŁ IX.

O Kuli.

140. *Defin:* Niechby Półkolé obrácało się około ſwoiéy śrzednicy, Okrąg iego przebiegnie, tym ſwoim obrotém powiérzchnią krzywą, którą nazwiémy *Powiérzchnią kuliſtą* (ſuperficies ſphærica); ſamé zaś półkole obiegnie mieyſcé tą powiérzchnią krzywą zakończoné, któré się nazywá *Kulą* (Sphæra albo Globus).

Pod czas tego obrotu, każdy punkt okręgu półkola, w jednakowéy zawſze byłby od iego śrzodka odległości; a zatém i każdy punkt powiérzchni kulistéy, w jednakowéy téż będzie odległości od tego śrzodka.

Kula więc iest bryłą zakończoną przez powiérzchnią krzywą, któréy wſzystkié punkta iednakowo ſą odległé od pewnégo punktu w niéy będącégo, nazwanégo *śrzodkiém*.

Od-

Odległość środka od punktu którégokolwiek powiérzchni kuli, nazywá się *promiéniém*. Liniiá każdá przechodzącá przez środek kuli, a po obudwóch stronach kończącá się na iéy powiérzchni, nazywá się śrzednicą, i dwa razy ieſt większą od promiénia. Ta zaś śrzednica, około któréy obrácaiąc się półkole, zrobiło kulę, nazywá się *Osią* kuli.

Gdybyśmy przecięli kulę płaszczyzną przechodzącą przez iéy środek, wſzyſtkié punkta przecięciá powiérzchni kuliſtéy, przez tę płaſzczyznę, byłyby iednakowo odległé od środka kuli, który na témże ieſt przecięciu.

Więc takié przecięcié ieſt kołém maiącém za promiéń, promiéń kuli.

Przecięcié kuli od płaſzczyzny, którá przez iéy środek przechodzi, nazywá się *wielkiém kołém kuli*.

Dwa takié koła przecinaią się, iedno z drugiém na dwie częśći równé.

Jakoż ſpólné ich przecięcié przechodzi, przez środek kuli, a zatém i przez środek tak iednégo, iak i drugiégo koła; więc ieſt śrzednicą obudwóch. A że śrzednica przeciná koło na dwie równé częśći; więc i dwa koła wielkié kuli

kuli przecinaią się na dwie części równé.

Gdyby kula przecięta była płaſzczyzną nie przechodzącą przez iéy środek, ale proſtopadłą do osi iéy obrotu, przecięcié to kuli byłoby kołém od spólnégo przecięciá téy płaſzczyzny z płaſzczyzną półkola, nakréśloném, pod czas obrotu tegoż półkola tworzącégo kulę.

Że zaś możná ſobie wyſtawić w myśli kulę daną, iakoby utworzoną przez obrot którégokolwiek półkola wielkiégo, około iego śrzednicy, i kula z tego obrotu powſtała, iednakowéy zawſze ieſt wielkości; więc gdziekolwiek przetniémy kulę płaſzczyzną, wszędzie przecięcié iéy, będzie kołém: ponieważ możná wziąść za oś kuli, tę iéy śrzednicę, którá do téy płaſzczyzny ieſt proſtopadłą.

Przecięcié kuli od płaſzczyzny nie przechodzącéy przez iéy śrzodek, nazywá się *małém kołém.*

Gdy przez koniec promiénia kuli, przechodzi płaszczyzna proſtopadłá do tego promiénia, wszyſtkié inſzé punkta téy płaſzczyzny będą za kulą.

Jakoż odległość którégokolwiek inſzégo punktu téy płaſzczyzny, od śrzodka kuli, ieſt przeciw proſtokątną Tróykąta

pro-

prostokątnégo, który má promień, za iedno ramié kąta prostégo, a zà drugié, odległość tego punktu, od końca promienia. Wszystkié tedy insze punkta téy płaszczyzny są od srzodka odległé większą ilością, niżeli iest promień a zatém są za kulą.

O płaszczyżnie, nié maiącéy ani mieć mogącéy więcéy nad ieden punkt spólny z kulą mówi się, iż się kuli *dotyká*. Ta zaś płaszczyzna powinná bydź prostopadłą do promienia, poprowadzonégo do punktu dotknięciá.

Przez punkt dotknięciá pociągnąwszy na téy płaszczyznie iakąkolwiek liniią prostą; ta będzie prostopadłą do tego promienia, który do punktu dotknięciá byłby poprowadzony; a zatém liniiá ta, będzie styczną z tém kołem, któreby było przecięciém kuli od płaszczyzny przechodzącéy przez tę liniią, i przez ten promień.

Jakośmy się zatrudniali wyżéy około Walców, i Ostrokregów prostych, tak teráz zatrudniać się będziémy około powierzchni i bryłowatości kuli, i iéy części różnych.

141. *Twièrdz: przybrané.* Niech będzie łuk koła, przez którégo punkt śrzedni poprowadziliśmy styczną, aż do iéy zeyściá

ściá się z obudwóch ftrón, z promieniami przez końce tego łuku przeciągnionémi.

Tak iednę, iak i drugą połowę tego łuku, podzielmy na dwie części równé i przez punkta podziáłu, poprowádźmy znowu dwie ftyczné aż do ich zeyściá się z promieniami przeciągnionémi przez końce tych połów.

Część promienia przeciągnionégo, zawartá między okręgiém, i piérwszą ftyczną, więcey niż dwa razy wększá ieft od części zawartéy między okręgiém, i iedną z drugich dwóch ftycznych.

Táb. VI. *Fig. 1.* Niech będzie ADB, łuk koła, przez którégo punkt śrzedni D, poprowadzoná ieft ftyczná fpotykaiącá w punktach E, i *e*; promienie CB, CA przedłużoné. Przez śrzednie punkta F, i *f*, łuków: BD, AD, poprowádźmy ftyczné: GH, Gh, któré fpotykaią w punktach: G, H, h, promienie przechodzącé przez końce łuków: BD, AD.

Trzeba dowieśdź iż liniiá BE, więcéy niż dwa razy ieft wększá od linii BH.

Niech liniiá CF, fpotyká w punkcie L, liniią Ee; Tróykąty: CDL, CFG, mogą przystać do siebie; więc linie: DG, albo BH, i FL, są równé.

Po-

Poprowádźmy cieńciwę BD, którą liniiá CL ſpotyka w punkcie I, i BM równoodległą od CL.

Tróykąty proſtokątné: BDM, JDL, są do siebie podobné: a że BD dwa razy ieſt większá od DI; więc też i BM, dwa razy większá będzie od JL; a zatém BM, więcéy niż dwa razy większá ieſt od FL albo BH. Że zaś w Tróykącie EBM, kąt M, ieſt roztwarty, a przeto liniiá BE, większá od linii BM; więc tem bardziey liniiá BE, więcéy niż dwa razy większá ieſt od linii BH.

142. *Wniosek* 1. Niech będzie promień CN, proſtopadły do promienia CA. Od punktów: E, H, B, ſpuśćmy proſtopadłe: EO, HP, BQ do promienia CN; ſtósunek liniy: EB, HB, równy będzie ſtósunkowi liniy OQ, PQ, A że EB więcéy niż dwa razy ieſt większá od BH, więc i OQ więcéy niż dwa razy większá też będzie od PQ.

143. *Wniosek* 2. Gdy daléy dzielić będziémy łuk AB, na części równé; 4, 8, 16, 32, i t. d. i przez punkta śrzednié podziałów, pociągniémy ſtyczné, aż do ich zeyścia się z promieniami przechodzacémi przez końce każdego w ſzczególności podziału: gdy nadto, od punktu, w którym oſtatniá ſtyczná ſpotyka promień przedłużony CE, ſpuścimy proſtopa-

dłą EO, na promień CN; różnica między odległością spodku O, tey prostopadłey, od śrzodka C, i odległością od tegoż śrzodka C, spodku Q, prostopadłey BQ, z końca B, łuku AB spuszczoney, ta mówię różnica zmnieysza się więcey niż połową za każdym następuiącym podziałem, a zatem może się naostatek stać mnieyszą od iakieykolwiek ilości naznaczoney.

144. *Twierdz:* 1. Niech będzie łuk koła, nie większy od czwartey części okręgu iego, i niech ten łuk obraca się około prostopadłego do drugiego promienia, który przechodzi przez ieden koniec tego łuku. Z drugiego iego końca spuśćmy prostopadłą na pierwszy promień toiest na oś obrotu łuku.

Część powierzchni kuli utworzona, tym około osi obrotem łuku, równa się Prostokątowi, maiącemu za podstawę liniią równą całemu okręgowi, którego ten łuk iest częścią; a za wysokość, liniią równą odległości śrzodka, od spodku prostopadłey spuszczoney na oś obrotu: powierzchnia zaś cała kuli, cztéry razy iest większa, niżeli powierzchnia wielkiego koła, teyże kuli.

Táb VI. *Fig.* 1.

Niech będzie łuk ADB; niech promień CN, będzie prostopadłym do promienia CA, przechodzącego przez ieden koniec tego łuku. Popro-

Poprowádźmy BQ, prostopadłą do CN. Niech koła czwartą część ABN, obracá się około promienia CN, iak około osi swoiéy. Powierzchniá krzywá, obrotém łuku AB naznaczoná, równá się Prostokątowi, któryby miał za wysokość, liniią CQ, a za podstawę, liniią równą okręgowi, którégo CA iest promieniém.

Dowodz: Niech styczná Ee, przechodzi przez środni punkt D, łuku AB, i niech spotyká w punktach E, i *e*, promienie przechodzącé przez dwa końce tego łuku.

Dzielmy daléy łuk AB, na części równé: 4, 8, 16, 32, i t. d. a od punktu, w którym ostatniá styczná spotyká promień CB, przy każdym następuiącym podziele, spuszczaymy prostopadłą na promień CN. Różnica między odległością środka, od spodku téy prostopadłéy, a liniią CQ, zmnieyszać się będzie więcéy niż połową za każdym następnym podziałem; więc różnica ta, może się naostatek stać mnieyszą, niż iakakolwiek ilość naznaczoná.

Podczas obrotu łuku AB, około linii CN, każdá styczná kréśli powiérzchnią krzywą Ostrokręgu ściętégo równaiącą się Prostokątowi maiącému za podstawę, liniią równą okręgowi, którégo promieniém, iest CN, a za wysokość, odle-

 głość

głość dwóch prostopadłych spuszczonych na oś, od końców téy styczney; a zatém summa powierzchni krzywych, zrobionych od wszystkich tych stycznych równá się Prostokątowi, maiącemu tę samę podstawę a wysokość równą summie wszystkich tych wysokości: toiest, równą odległości środka, od spodku prostopadłéy spuszczonéy na oś z punktu tego, gdzie ostatniá styczná spotyká promień CB. Może tedy różnica summy powierzchni krzywych Ostrokręgu zrobionych obrotém wszystkich stycznych, mnieysza bydź od Prostokąta z taką, iak się wyżéy powiedziało podstawą a z wysokością CQ, niżeli iakákolwiek ilość naznaczoná. Summa zaś tych wszystkich powierzchni krzywych, większá iest zawsze od powierzchni utworzonéy obrotém łuku AB; więc (podług tego, co się powiedziało w Części I. o sposobie wyczerpaniá, i w Rozdziele o kwadrowaniu koła) powierzchniá krzywá utworzoná obrotém łuku AB, równá się Prostokątowi, maiącemu za podstawę, okrąg, którégo promieniém iest CA, a za wysokość, odległość CQ, środka C, od spodku Q, prostopadłéy spuszczonéy na oś z końca B, tego łuku. (h) Mó-

(h) Nie dosyć tu będzie rzucić okiém na to, co się powiedziało o sposobie wyczérpaniá i o kwadrowaniu koła, ale trzeba, aby Nauczyciel w szczególności czynił z Uczniami té

Mówiąc w szczególności; powiérzchniá *Półkuli* (Hemispherium) utworzonéy obrotém czwartey części koła, ABN, równá się Prostokątowi maiącému za podstawę okrąg, którégo, CA iest promiéniém, a za wysokość, promień CN.

A zatém powiérzchniá krzywá, utworzoná obrotém łuku BN, równá się Prostokątowi maiącému wysokość NQ, a podstawę równą okręgowi wielkiégo koła kuli.

Powiérzchniá także całéy kuli, równá się prostokątowi maiącému za wysokość śrzednicę kuli, a za podstawę, okrąg wielkiégo iéy koła, a że powiérzchniá wielkiégo koła równá się Prostokątowi maiącému za wysokość połowę promiénia, albo czwártą część śrzednicy, a okrąg tego koła, za podstawę.

Więc powiérzchniá kuli cztéry razy iest tak wielka, iak powiérzchnia wielkiégo iey koła, a równá kołu którégo promień równałby się śrzednicy téyże kuli.

145. Idzie zatém, że powiérzchniá kuli, tak się má do powiérzchni kwadratu iéy śrzednicy; iak powiérzchnia koła iakié-

---

wszystkié przystósowaniá, które, tu i niżéy ieszcze czynić będzie można.

kiégokolwiek, cztéry razy wziętá, do kwadratu śrzednicy tegoż koła: A że powiérzchniá koła, ieſt do powiérzchni kwadratu śrzednicy iego, iak okrąg koła do iéy śrzednicy cztéry razy wziętéy, iako się w Rozdziele XIII. Części I. dowiodło); więc powiérzchniá kuli tak się má do powiérzchni kwadratu iéy śrzednicy; iak cztéry razy okrąg koła, do śrzednicy iego cztéry téż razy wziętéy, toieſt: iak okrąg koła, do swoiéy śrzednicy. Więc wyznaczénie dokładné powiérzchni kuli, zawisło od ſkwadrowaniá koła, i od wyproſtowaniá okręgu iego.

146. Powiérzchniá całá kuli, tak się má do powiérzchni nakreślonéy obrotém łuku NB, iak się má śrzednica kuli, do linii NQ, albo iak kwadrat téy śrzednicy, do Proſtokąta z linii NQ, i ze śrzednicy; albo na koniec, iak kwadrat śrzednicy, do kwadratu linii NB, a zatem, iak koło, któréby miało za promień tę śrzednicę, do koła, któréby miało za promień liniią NB. A że powiérzchniá kuli równá się powiérzchni piérwſzégo koła; więc powiérzchniá nakréślona obrotém łuku NB, równá się powiérzchni drugiégo koła.

Táb. VI. *Fig. 2.*

Niech będzie NBFA, półkolé tworzącé obrotém ſwoim kulę; niech będzie; NEDA Proſtokąt, którégo podſtawą ieſt śrze-

śrzednica tego półkola, a wysokością promień iego. Podczas obrotu półkola, ten Prostokąt utworzy Walec prosty, którego powierzchnia krzywa zrobiona przez obrot linii ED, równać się będzie Prostokątowi maiącemu za wysokość śrzednicę DE, albo AN, a za podstawę okrąg podstawy tego Walca; a zatem ta powierzchnia krzywa, równa się powierzchni kuli.

147. Podobnie się okaże, iż poprowadziwszy linią QBP, prostopadłą do osi, powierzchnia krzywa należąca do Walca, a zrobiona przez obrot linii EP, rowna iest powierzchni należącey do kuli, a zrobioney przez obrot łuku NB.

148. Walec utworzony obrotem Prostokąta ADEN, miałby wysokość równą śrzednicy podstawy swoiey; dotykałby się w punktach: A, i N, kuli utworzoney obrotem półkola AFBN; dotykałby się iey także w okręgu, którego promieniem byłby promień CF kuli.

O takim Walcu mówi się, iż iest na kuli opisanym. Nazywa się on także i Walcem Archimedesa, od nazwiska tego Matematyka, który pierwszy znalazł równość powierzchni kuli z powierzchnią krzywą tego Walca, iako też i stósunek ich bryłowatości.

149. Powierzchnia iedney z dwóch podstaw tego Walca, równa się Prostokątowi z okręgu tey podstawy, i z połowy iey promienia: a zatem powierzchnia obudwóch razem tych podstaw, równa się Prostokątowi z okręgu iedney podstawy, i z iey promienia. A że powierzchnia krzywa Walca, równa iest Prostokątowi z okręgu podstawy iego, i że śrzednicy teyże podstawy, albo z promienia dwa razy wziętego; więc powierzchnia cała Walca, równa iest Prostokątowi z okręgu iego podstawy, i z promienia trzy razy wziętego: a zatem powierzchnia krzywa tego Walca iest $\frac{2}{3}$ powierzchni iego całey, a przeto i powierzchnia kuli iest też $\frac{2}{3}$ powierzchni całey Walca na niey opisanego.

150. *Uwaga.* To, co się dotąd powiedziało, trzeba przystósować do niektórych przykładów liczebnych podobnych następuiącemu.

Przykł: Jakaż iest wielkość powierzchni Ziemi w milach kwadratowych Niemieckich, rachuiąc na stopień, mil 15?

Niech będą dwa koła wielkie Ziemi, iedno prostopadłe do drugiego. Podzielmy okrąg iednego z tych kół, n. p. co dziesięć, al o co pięć stopniów, i przez punkta podziału niech przechodzą płaszczy-

czyzny równoodległé od koła drugiégo. Trzeba znaleźć wielkość powiérzchni zawartych między dwoma nayblizfzémi od siebie przecięciami.

W fzczególności zaś, ieżeli Uczniowie maią wiadomość początkową Jeografii, mogą wyrachować dwie powiérzchnie zawarté między kołami, z których iedno odległé ieft od *Rownika* (aequator), na $23^{\circ} \frac{1}{2}$, a drugié od *Biegonu* (polus) także na $23^{\circ} \frac{1}{2}$.

Niech będzie CF promiéniém iednégo koła wielkiégo: niech NBF, wyráżá czwartą część drugiégo koła do niego proftopadłégo: niech BQ, bq, będą przecięciami tego koła proftopadłégo i dwóch płafzczyzn równoodległych od koła piérwfzégo.

Táb. VI. *Fig. 2.*

Powiérzchniá krzywá półkuli, tak się má do powiérzchni części zawartéy między płafzczyznami CF i BQ, iak się má promiéń kuli, do linii CQ, która ieft wftawą łuku BF. Podobnie i powiérzchniá krzywá półkuli, tak się má do powiérzchni części zawartéy między płafzczyznami: CF, i bq; iak wftawa cała, czyli promiéń do wftawy łuku bF, toieft do linii Cq. Możná więc wyrachować té części powiérzchni półkuli, a zatém i ich różnicę, toieft: część powiérzchni zawartéy między płafzczyznami: BQ, i *bq*.

151. *Twierdz*: 2. Bryłowatość kuli równá się $\frac{2}{3}$ bryłowatości Walca na téy kuli opiſanégo.

Táb. *VI.* *Fig. 3.* Niech będzie ACBMA czwártá część koła, tworzącá Półkulę obrotém ſwoim około promiénia CB. Niech będzie CABD kwadrat opiſany na téy czwártéy części koła. Tén kwadrat obrácaiąc się około CB, utworzony Walec opiſany na półkuli, który będzie połową Walca opiſanégo na całéy kuli. Trzeba dowiéśdź, iż Półkula utworzoná obrotém czwártéy części koła AMBC równá się $\frac{2}{3}$ Walca utworzonégo obrotem kwadratu ACBD.

Poprowádźmy przekątną CD; Tróykąt BCD utworzony Oſtrokrąg, którégo podſtawa wykréśloná będzie promieniem BD, a za wyſokość tego Oſtrokręgu będzie BC; toieſt będzie tén Oſtrokrąg równéy z Walcém podſtawy, i wyſokości.

Od dwóch którychkolwiek punktów n.p. P, i *p* Osi CB wyciągniymy proſtopadłé do niéy liniie : PQ, pq; té przetną okrąg w M, i *m*, a liniią CD w L, i *l*; nakréślmy nadto, liniie : MN, *mn*, LO, *lo*, równoodległé od osi. Kwadrat promiénia CM, równá się ſummie kwadratów z PM, i CP: a że liniiá PQ rówwná ieſt promiéniowi, (tak iako BD,

CA

CA i CB ſą równe) i CP równa PL; więc kwadrat z PQ, równa się ſummie kwadratów z PM, i z PL.

Że zaś Walce utworzone obrotem Proſtokątów Pq, PN, PO, maiących iednakie wyſokości, ſą do siebie, iak ich podſtawy, albo iak kwadraty promieniów tychże podſtáw; więc pierwſzy z tych Walców będzie równy ſummie dwóch inſzych. Podobnym ſpoſobem okazać można, że Walec Pq równa się ſummie Walców utworzonych obrotem Proſtokątów *Pm*, i *Pl*.

Takowe dowodzenie ma mieyſce chociaż nie od punktów P, i p, ale od którychkolwiek inſzych będą wywiedzione proſtopadłe do osi CB; a zatem podzieliwſzy oś, na iakąkolwiek liczbę części równych, a od każdego punktu podziału wyciągnąwſzy proſtopadłe przecinaiące tak okrąg, iako i liniią CD; ſumma wſzyſtkich Walców ſkładaiących Walec ADB, równać się będzie ſummie wſzyſtkich Walców wpiſanych w Półkulę, wráz z ſummą wſzyſtkich Walców opiſanych na Oſtrokręgu, albo ſummie wſzyſtkich Walców opiſanych na Półkuli, wráz z ſummą wſzyſtkich Walców w Oſtrokrąg wpiſanych. A że ſumma wſzyſtkich Walców wpiſanych lub opiſanych na Półkuli, może się mnieyſzą ilością różnic od téyże Półkuli, niż iakakolwiek

ilość

ilość naznaczoná ; (§. 94. i naſt: §. 106,) a wtedy i ſumma wſzyſtkich Walców wpiſanych, lub opiſanych, Oſtrokręgowi, różnić się téż od tego Oſtrokręgu będzie mnieyſzą ilością, niż ieſt ta ilość daná.

Więc (podług tego, co się powiedziało w Części I. o ſpoſobie wyczérpaniá,) Walec utworzony obrotém kwadratu CABD, równá się ſummie z Półkuli utworzonéy obrotém czwártéy części koła, i z Oſtrokręgu utworzonégo obrotém Tróykąta BCD.

A że Oſtrokrąg utworzony obrotém Tróykąta BC, ieſt $\frac{1}{3}$ Walca; więc Półkula utworzoná obrotém czwártéy części koła AMBC, ieſt $\frac{2}{3}$ Walca.

A zatém kula, którąby utworzyła ſię obrotém Półkola, byłaby też $\frac{2}{3}$ Walca opiſanégo na téy kuli, a utworzonégo obrotém Proſtokąta opiſanégo na Półkolu tworzącém kulę.

152. *Wnioſek* 1. Stóſunek bryłowatości kuli do bryłowatości Walca opiſanégo, tén ſám ieſt, co i ſtóſunek powiérzchni kuli, do powiérzchni całéy Walca opiſanégo; (149).

153. *Wnioſek* 2. Bryłowatość kuli, równá się bryłowatości Oſtrokręgu, któryby

ryby miał za podstawę, koło równe powierzchni kuli, a za wysokość promień téyże kuli. Jakoż tén Ostrokrąg maiąc podstawę cztery razy większą od podstawy Walca na kuli opisanégo, byłby cztéry razy większy od Ostrokręgu inszégo równey z nim wysokości, a maiącégo podstawę równą z Walcém. A że tén drugi Ostrokrąg, gdyby miał połowę tylko wysokości Walca, byłby połową Ostrokręgu maiącégo równą z Walcém wysokość i podstawę: a zatém byłby połową tego Ostrokręgu, który iest $\frac{1}{3}$ Walca; Więc Ostrokrąg maiący równą z Walcém podstawę, a wysokość równą promieniowi kuli, iest $\frac{1}{6}$ tego Walca; a zatém Ostrokrąg maiący za wysokość promień kuli, a podstawę cztery razy większą od podstawy Walca, byłby $\frac{4}{6}$ albo $\frac{2}{3}$ Walca. Że zaś i kula iest $\frac{2}{3}$ tegoż Walca; więc kula równá się tému Ostrokręgowi.

Możná to samo ieszcze i w tén sposób okázać.

Niech będzie iakikolwiek *Wielościán* (Polyedrum) którégo wszystkié ściany dotykaią się kuli: uważaiąc każdą z tych ścián iak podstawę Ostrogranu maiącégo swóy wiérzchołek we śrzodku Wielościanu; bryłowatość tego Wielościanu, równać się

się będzie bryłowatości iednégo takiégo Ostrogranu, któryby miał za wysokość promień kuli, a za podstawę ſummę podstáw, Ostrogranów, na które podzielony był tén Wielościán; toiest powiérzchnią całą tego Wielościanu.

To podanié zawsze iest práwdziwé, iakążkolwiek będzie liczba ścián tego Wielościanu; więc (podług tego, co ſię mówiło o ſposobie wyczérpaniá, możnaby łatwo dowiéśdź, że też i do kuli w ſzczególności pzystósowané to podanie, iest prawdziwém, a zatém że kula, równá się Ostrokręgowi, któryby miał za wysokość, iéy promień, a za podstawę, całą iéy powiérzchnią.

154. *Wnioſek 3.* Wycinek kuli utworzony obrotém wycinka kołowégo BCM, równy iest Ostrokręgowi maiącému za wysokość, promień téy kuli, a zapodstawę, koło, równé powiérzchni kulistéy, utworzonéy obrotem łuku BM; toiest koło, którégo promieniém byłaby cieńciwa BM; a zatém bryłowatość tego wycinka, tak ſię má do bryłowatości kuli, iak powiérzchniá tego wycinka kuli, czyli część powiérzchni kulistéy do powiérzchni całéy kuli; albo iak wysokość BP, do śrzednicy kuli.

155. *Wniosék 4.* Taż bryłowatość wycinka kuli, utworzonégo obrotém wycin-

wycinka koła BCM, iest $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotém Prostokąta BPQD. Jakoż powierzchnią tego wycinka kuli tak się ma do powierzchni kuli, iak BP, do śrzednicy kuli albo iak Walec utworzony obrotém Prostokąta BPQD do Walca opisanégo na kuli. A że kula iest $\frac{2}{3}$ Walca na niéy opisanégo; więc i wycinek kuli, utworzony obrotém wycinka koła BCM, iest też $\frac{2}{3}$ Walca utworzonégo obrotém Prostokąta BPQD.

156. *Wniosek 5.* Podobnie, i część kuli utworzoná obrotém wycinka ACM iest $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotém Prostokąta CAQP. A że część kuli (którą to część nazwać można *klócém kulistym* (Truncus ſphæricus) utworzoná obrotém części kołowéy ACPM, iest ſummą z wycinka kulistégo utworzonégo obrotém wycinka kołowégo ACM, i z Ostrokręgu utworzonégo obrotém Tróykąta CPM; więc bryłowatość tego kloca kulistégo, równá się ſummie z $\frac{2}{3}$ Walca téyże z nim wysokości, któryby miał za podstawę, koło wielkié kuli, i z $\frac{1}{3}$ Walca iednakiéy także wysokości, a którégo podstawa byłaby równá drugiemu kołu klóc ten kończącému; a zatém bryłowatośc tego kloca tak się má do bryłowatości Wałca utworzonégo obrotem Prostokąta CAQP, iak $\frac{2}{3}$ CA^2 + $\frac{1}{3}$ MP^2 do CA^2.

157.

157. *Wniosek. 6.* Aby znaléźć odcinek kuli utworzonéy obrotem odcinka kołowégo BMP; uważáymy sobie ten odcinek kulisty, iak różnicę między Półkulą utworzoną obrotem czwartey części kołowéy ABC, a klócém kulistym utworzonym przez obrot odcinka CAMP: albo też iak rożnicę wycinka kulistego utworzonégo obrotém wycinka BDM; od Ostrokręgu utworzonégo obrotem Tróykąta CPM: albo na koniec, iak różnicę Walca utworzonego obrotém Prostokąta BPQD, od Ostrokręgu ściętégo, utworzonégo obrotem Czworokąta BDLP.

ROZDZIÁŁ X.

O bryłach podobnych.

158. Dwie Bryły samémi tylko płaszczystémi powierzchniami zakończoné, i których wszystkié kąty bryłowé odpowiadaiącé sobie mogą przystać do siebie, a ściany ich także odpowiadaiącé są podobné; té, mówię dwie Bryły nie różnią się chyba samą tylko wielkością, i iedna wzorem iest drugiéy. Tak n. p. dwa Sześciany, z których iedén má bok długi na pół stopy, a drugi na cal iedén, różnią się samą tylko wielkością. Takié Bryły nazywaią się podobnémi.

Przy-

Przykłady. Dwa Równoległościany prostokątné są podobné, gdy ich podstawy i ściany są podobné iedné względém drugich.

Dwa Graniastosłupy prosté, są podobné, gdy podobné są ich podstawy, i gdy wysokość ich proporcyonalná iednému z boków, tychże podstaw.

Dwa Ostrograny, maiącé kąt bryłowaty fpólny w wierzchołku podobné będą, gdy podstawy ich są równoodległé.

159. *Uwága.* Gdy dwie Figury prostokréślné, są podobné; wziąwfzy punkt iakikolwiek w iedné'y z tych figur, i poprowadziwfzy od tego punktu liniie do wfzystkich wiérzchołków té'y figury; možná będzie znaléźć i w drugié'y figurze punkt podobnie piérwszému położony; od którégo ciągnąc liniie do każdégo té'y figury wiérzchołka, podzielimy ią na Tróykąty podobné względém Tróykątów, na któré podzielona była piérwszá figura. Podobnie téż:

160. *Twiérdz:* 1. Wziąwszy w Bryle zakończoné'y powiérzchniami płafzczystémi, punkt iakikolwiek za wiérzchołek tylu Ostrogranów, ilé ta Bryła má ścián, biorąc téż ściany za podstawy; možná znaléźć i w drugié'y Bryle podobné'y, punkt podobnie piérwfzému położony,

 któ-

który wziąwſzy także za wiérzchołek, tyluż co i w piérwſzéy Bryle Ostrogranów wſzyſtkié té Ostrograny będą podobné względém Oſtrogranów piérwszéy Bryły.

Przykład. Weźmy śrzodek Sześcianu za wiérzchołek ſześciu Ostrogranów, maiących za podstawy, ściany tego Sześcianu; gdy w jnszym iakimkolwiek Sześcianie, weźmiémy także śrzodek za wiérzchołek ſześciu Ostrogranów maiących za podstawy, ściany tego drugiégo Sześcianu; té drugié Ostrograny, będą podobné względém piérwszych.

Toż mówić i o inſzych Bryłach forémnych.

Na tém podaniu zasádzá się cała Nauka o Bryłach podobnych; należy więc nad wyłuſzczéniém iéy nieco zabawić się.

Wybráwſzy iakikolwiek punkt w Bryle za wiérzchołek Ostrogranów maiących ściany téy Bryły, za podstawy, i na té Oſtrograny, Bryłę podzieliwszy, ſpuśćmy od tego punktu prostopadłą do iednéy z ścián téy Bryły; a na ścianie odpowiadaiącéy w drugiéy Bryle, weźmy punkt podobnie na téy ścianie położony, iak i ſpodek proſtopadłéy ſpuszczonéy na ścianę piérwſzéy Bryły; od tego punktu, na ścianie drugiéy Bryły położonégo, wyprowádźmy

pro-

prostopadłą do tey ściany, tak wysoką aby stósunek iey do pierwszey prostopadłey równał się stósunkowi dwóch krawędzi, odpowiadaiących sobie w obudwóch Bryłach. Wierzch tey drugiey prostopadłey weźmy za wierzchołek wszystkich Ostrogranów, na które, tę drugą Bryłę dzielić mamy. Ostrograny tey drugiey bryły, będą podobne względem Ostrogranów, na które podzielona pierwsza Bryła.

Dowodz: Odległości dwóch punktów służących za wierzchołki Ostrogranów, od wierzchołków odpowiadaiących sobie w ścianach, do których prostopadłe są ciągnione, te mówię odległości, są przeciw prostokątnemi Tróykątów prostokątnych podobnych, maiących za boki te prostopadłe, i odległości ich spodków od wierzchołków kątów ścián tychże. Więc wszystkie ściany tych dwóch Ostrogranów, odpowiadaiące sobie boki, maią proporcyonalne, toiest maią ie w stósunku dwóch krawędzi odpowiadaiących sobie w dwóch Bryłach: a zatem wszystkie te ściany, są podobne, i wszystkie ich kąty są równe iedne względem drugich, a przeto i kąty bryłowe które się z nich składaią, mogą przystać do siebie; są więc te dwa Ostrograny podobne. Pochyłości też ścián Ostrogranów do płaszczyzn podstáw są równe iedne względem drugich: a że także równe są pochyłości, tych podstáw

 do

do płaszczyzn ścián tych odpowiadaiących sobie w Bryłach, które ściany spólną krawędź maią z podstawami tych Ostrogranów; więc i ściany odpowiadaiące sobie w tych dwóch Ostrogranach, będą podobnie nachylone do ścián tych odpowiadaiących sobie w dwóch Bryłach, a które maią spólną krawędź z pierwszémi dwiéma ścianami: toiest, z podstawami dwóch tych Ostrogranów.

Na ścianach dwóch, odpowiadaiących sobie w tych dwóch pierwszych Ostrogranach, spuśćmy od ich wierzchołków prostopadłe do podstáw tychże dwóch ścián: a od spodków tych prostopadłych poprowádźmy na ścianach odpowiadaiących sobie w dwóch Bryłach, insze dwie prostopadłe do tychże dwóch podstáw, ścián Ostrogranów. Oprócz tego, na płaszczyznach przechodzących przez dwie w obudwóch bryłach ciągnione prostopádłe, spuśćmy do drugich dwóch prostopadłych znáyduiących się na płaszczyznach ścián odpowiadaiących sobie, w Bryłach, od tychże co i pierwsze wierzchołków, trzecie dwie prostopadłe (Obácz Rozdź: I. §. 9. na karcie 20. i następ: Tábl:I. Fig. 3.) te ostatnie prostopadłe, będą prostopadłémi do płaszczyzn dwóch tych ścián odpowiadaiących sobie, na których ciągnione były dwie drugie prostopadłe; Tróykąty zawarte trzéma témi prostopadłémi, tak w jedney, iak i w drugiey

gie'y bryle, będą równokątne', a zatem i podobne. A że pierwsze' dwie prostopadłe' ciągnione' na płaszczyznach ścian, dwóch pierwszych Ostrogranów, maią się do siebie, iak krawędzie odpowiadaiące' sobie w dwóch bryłach; więc też i odległości wierzchołków, tych dwóch Ostrogranów od drugich dwóch ścian także sobie odpowiadaiących, w tych bryłach, będą w tymże samym stósunku: i odległości spodków ich, od dwóch krawędzi należących do tych ścian, a odpowiadaiących sobie, w tymże też stósunku będą.

Spodki prostopadłych spuszczonych na dwóch ścianach odpowiadaiących sobie w pierwszych dwóch Ostrogranach, były podobnie położone' na dwóch brył krawędziach odpowiadaiących sobie: a zatem odległości tych spodków od końców odpowiadaiących sobie, tych krawędzi, są do siebie w tymże samym stósunku: a zatem odległości spodków liniy prostopadłych spuszczonych do płaszczyzn drugich dwóch ścian brył, od końców tychże dwóch krawędzi, będą w tym samym stósunku. Więc na tych dwóch ścianach, spodki prostopadłych podobnie są położone. Że zaś i wielkości tych prostopadłych są proporcyonalne' krawędziom tych dwóch brył; więc wierzchołki pierwszych dwóch Ostrogranów, są

téż podobnie położoné względém dwóch ścián drugich, odpowiadaiących sobie w Bryłach: a zatém i drugié dwa Ostrograny będą do siebie podobné.

Toż mówić i o inszych Ostrogranach odpowiadaiących sobie, z których się té dwie bryły składaią. (i)

161. *Twiérdz:* 2. Powiérzchnie brył podobnych, zakończonych saméni tylko płaszczystémi powiérzchniami, maią się do siebie, iak kwadraty boków ich odpowiadaiących sobie, czyli są w stósunku dwumnożnym tychże boków.

Dowodz: Wszystkié ściany dwóch brył podobnych, po dwie brané są sobie podobné. J tak brané, w jednakowym do siebie są stósunku, toiest w stósunku dwumnożnym, dwóch krawędzi odpowiadaiących sobie; więc i summa wszystkich ścián kończących iednę bryłę,

---

(i) To Twiérdzénié, iest bardziéy długié niż trudné, i łatwo poiąć ié możná, maiąc Figurę przed oczyma z drewna, lub z papiéru zrobioną. Jużby téż nawet po tak wielu Jeometrycznych ćwiczéniach powinni wprawiéni bydź Uczniowie, aby w myśli samey umieli sobię wystawić Figurę pomagaiącą do zrozumiénia Twiérdzénia podanégo; a zdatnieyszą do obiaśniénia iego, niżby była Figura odrysowana w perspektywie, i przed oczy im stawioná.

łę, będzie do summy wszystkich ścián kończących drugą bryłę, w tymże samym stósunku.

162. *Twiérd:* 3. Bryłowatości dwóch brył podobnych, są do siebie w stósunku sześciénnym dwóch ich krawędzi odpowiadaiących sobie, czyli, są w stósunku tróymnożnym tychże dwóch krawędzi.

1. Widzieliśmy iuż, że stósunek iednégo sześcianu do drugiégo, tén sám iest, co i stósunek boku piérwszégo sześcianu, do czwártéy linii ciągło proporcyonalnéy; która się znáyduie, szukaiąc naprzód trzeciéy ciągło proporcyonalnéy do boku sześcianu piérwszégo, i do boku sześcianu drugiégo, a potém do tychże dwóch boków, i do trzeciéy proporcyonalnéy znalezionéy, szukaiąc czwártéy.

Gdyby tedy bok drugiégo sześcianu był dwa razy n.p. większy od boku sześcianu piérwszégo; ta czwártá ciągło proporcyonalná, byłaby ośm razy większá od boku sześcianu piérwszégo, a zatém i sześcián drugi byłby ośm razy większy od sześcianu piérwszégo.

2. Niech będą dwa Równoległościany prostokątné podobné.

Gdy

Gdy krawędź iedna, iednego z tych Równoległościanów, ieſt n.p. dwa razy więkſzá, od krawędzi iedney drugiego Równoległościanu; wſzyſtkie też inſze krawędzie pierwſzego Rownoległościanu, będą dwa razy więkſze od krawędzi drugiego. Powierzchniá więc podſtawy pierwſzego Równoległościanu, będzie cztery razy więkſzá, niż powierzchniá podſtawy drugiego. A że też i wyſokość pierwſzego, dwa razy ieſt więkſzá od wyſokości drugiego; więc bryłowatość pierwſzego, ieſt ośm razy więkſzá od bryłowatości drugiego. To rozumowanie przyſtóſować można do wſzyſtkich inſzych liczebnych przykładów podobnych przytoczonemu.

W ogólności zaś mówiąc: niech będą trzy krawędzie: A, B, C, iednego Równoległościanu proſtokątnego; a zaś: *a*, *b*, *c*, krawędzie drugiego Równoległościanu, pierwſzému podobnego; będą té trzy ſtóſunki równe; A: a = B: b = C: c. Liniióm A, i *a*, znáydźmy dwie linie L, i M, ciągło proporcyonalne; tak, aby było A: a = a: L = L: M.

Będzie pierwſzy Równoległościán do drugiego, iak A do M.

Jakoż uwáżaiąc liniie A i *a*, B, i *b*, iak boki podſtáw, tych dwóch Równoległościanów, zamieńmy Proſtokąt z linii

nii a, i b, na inſzy, któryby miał za bok ieden, liniią B; a za bok drugi, tę liniią, która wypadnie z proporcyi B: b = a: *x*. Że zaś ſtóſunek linii B do b, wzięty ieſt za równy ſtóſunkowi linii A do *a*; więc też będzie A: a = a: x; a zatem ta czwárta proporcyonalna, którey ſzukámy, będzie w ſamey rzeczy trzecią proporcyonalną do A, i *a*. Nazwiymy tę trzecią proporcyonalną; L. Będzie podſtawa drugiego Równoległościanu, równa Proſtokątowi z B przez L; i ten drugi Równoległościan, będzie równy Równoległościanowi, któryby miał trzy liniie B, *c*, L, za krawędzie: a zatem ſtóſunek iego do pierwſzego Równoległościanu, będzie ten ſam, co i ſtóſunek Proſtokąta z liniy c, i L, do Proſtokąta z liniy A, i C.

Zamieńmy Proſtokąt z liniy *c* i L, na inſzy, któryby miał za bok ieden liniią C, a za bok drugi liniią, która wypadnie z proporcyi C: *c* = L: x. Że zaś ſtóſunek linii C do *c*, wzięty ieſt za równy ſtóſunkowi A do *a*, a ſtóſunek A do *a*, zrobiliśmy równy ſtóſunkowi *a*, do L; więc też będzie *a*: L = L : x; a zatem ta czwárta proporcyonalná, którey ſzukámy, będzie w ſamey rzeczy trzecią proporcyonalną do *a* i L. Nazwiymy tę trzecią proporcyonalną: M; Proſtokąty: C × x, M i *c* × L, będą równe. A że się dowiodło, iż pierwſzy Równole-

le-

ległościán ieſt do drugie'go w ſtóſunku Proſtokąta $A \times C$ do Proſtokąta $c \times L$; więc te'ż te'n pie'rwſzy Równolegościán będzie do drugie'go w ſtóſunku Proſtokąta $A \times G$ do Proſtokąta $C \times M$, toieſt w ſtóſunku A do M.

Że zaś ieſt $A: a = a: L = L: M$; więc ſtóſunek pie'rwſze'go Równoległościanu do drugie'go, równá się ſtóſunkowi linii pie'rwſzéy do czwártéy, ciągło proporcyonalnéy; którá to pie'rwſzá liniiá służącá za pie'rwſzy wyráz proporcyi, powinná bydź krawędzie'm iedne'go z tych Równoległościanów, drugim zaś téyże proporcyi wyraze'm, má bydź krawędź drugie'go Równoległościanu, pie'rwſze'mu odpowiadaiący; tak iak ieſt n.p. krawędź A, i *a*.

Ale że te'ż i dwa ſześciany maiące krawędzie A, i *a*, w tymże ſamym byłyby ſtóſunku; więc dwa Równoległościany podobne, maią się do siebie w ſtóſunku ſzeście'nnym ich krawędzi.

163. *Twie'rdz: przybrane.* Wyſokości Graniaſtosłupów podobnych, lub Oſtrogranów podobnych, tak się maią do siebie, iak ich krawędzie odpowiadaiące ſobie.

Dowodz: Dwóch ścián odpowiadaiących ſobie w dwóch Graniaſtosłu-

słupach podobnych, pochyłości do podſtáw ſą równe; tychże ścián wyſokości, tak się maią do siebie, iak boki, służące im za podſtawy. Wyſokości tych Graniaſtosłupów, równe ſą proſtopadłym ſpuſzczonym na ich podſtawy od punktów którychkolwiek na podſtawach przeciwnych; n. p. od punktów na bokach odpowiadaiących ſobie w tychże podſtawach; a zatém té wyſokości Graniaſtosłupów, będą służyć za iedno ramié kąta proſtégo, w dwóch Tróykątach podobnych, które za przeciwproſtokątné, maią wyſokości dwóch ścián odpowiadaiących ſobie. Będą zatém té wyſokości dwóch Graniaſtosłupów, tak się mieć do siebie, iak wyſokości dwóch ich ścián odpowiadaiących ſobie, toieſt: iak krawędzie dwóch tychże Graniaſtoſłupów, odpowiadaiącé ſobie. To ſamo rozumowanié przyſtóſować można i do Oſtrogranów.

3. Niech będą dwa iakiékolwiek Graniaſtoſłupy podobné, i té także ſą do siebie w ſtóſunku ſześciennym, ich krawędzi odpowiadaiących ſobie.

Rozumowanié Arytmetyczné, któréby mogło służyć za wſtęp do ogólnégo dowodzéniá, to ſamo ieſt, co i poprzedzaiącé.

Wyſta-

Wyſtawuiąc ſobie podſtawy tych dwóch Graniaſtosłupów, zamienioné na dwa kwadraty równé im co do powiérzchni; ponieważ powiérzchnie tych dwóch podſtáw, maią się do siebie, iak kwadraty boków ich, odpowiadaiących ſobie; więc też i powiérzchnie kwadratów równych tym podſtawóm, mieć się do siebie będą, iak kwadraty boków odpowiadaiących sobie, w tychże podſtawach: a zatém i ſtósunek boków, tych dwóch kwadratów, równy będzie ſtósunkowi boków odpowiadaiących ſobie w podſtawach, dwóch Graniastoſłupów. A że tén oſtatni ſtósunek, równá się ſtósunkowi wysokości dwóch Graniaſtoſłupów; więc Równoległościany maiącé za podſtawy kwadraty, równé podſtawóm Graniaſtoſłupów, i wysokości równé wysokościóm Graniaſtoſłupów, byłyby do siebie podobné; a zatém té dwa Równoległościany, takby ſię do ſiebie miały, iak Sześciany ich krawędzi, albo iak Sześciany krawędzi odpowiadaiących sobie w Graniaſtoſłupach. Że zaś té Równoległościany, byłyby równé względém Graniaſtoſłupów; więc téż i dwa Graniaſtoſłupy podobné, maią ſię do siebie, iak Sześciany krawędzi ich, odpowiadaiących ſobie.

4. Niech będą dwa iakiékolwiek Oſtrograny podobné, ſtóſunek ich równá się ſtósunkowi Sześcianów krawędzi ich, odpowiadaiących sobie. Dwa

Dwa Graniastosłupy n. p. proste, których podstawy i wysokości byłyby równe względem podstawy i wysokości, tych Ostrogranów, te mówię, Graniastosłupy miałyby wysokości proporcyonalne bokóm podstaw swoich; byłyby więc podobne: a zatem takby się do siebie miały, iak Sześciany ich krawędzi. A że byłyby trzy razy większe względem tych dwóch Ostrogranów; więc i te Ostrograny są do siebie w stósunku Sześciennym ich krawędzi.

5. Wszystkie Bryły podobne, zakończone powierzchniami płaskiemi, maią się do siebie iak Sześciany, ich krawędzi odpowiadaiące sobie.

Dwie Bryły podobne, można rozłożyć na takie Ostrograny, z których każdy w szczególności należący do iedney Bryły, podobny będzie drugiemu należącemu do drugiey Bryły. Te Ostrograny iedne względem drugich poiedynczo brane, mieć się do siebie będą w stósunku sześciennym ich krawędzi, odpowiadaiących sobie; więc i summa wszystkich Ostrogranów, z których się składa iedna Bryła, będzie do summy wszystkich Ostrogranów, z których się składa druga Bryła, w tymże samym stósunku, to iest w stósunku sześciennym, ich krawędzi, odpowiadaiących sobie.

164. *Defin:* Walce proſte podobne do siebie są te, których stósunek wysokości, równa się ſtósunkowi promieni, ich podſtáw; przecięciá zatem tych Walców przez osi przechodzące, są podobne, a stąd podobne są i Prostokąty tworzące obrotem swoim te Walce.

Co zaś do Walców pochyłych, a do siebie podobnych: oprócz tego, że wysokości ich mieć się powinny do siebie, iak promienie ich podſtáw, przecięciá też ich od płaſzczyzny przechodzącey przez ich osi prostopadłe do podstawy, powinny bydź do siebie podobne; a zatem iednakowo nachylone do płaſzczyzn podſtáw, toiest ich osi powinny się mieć do siebie, iak promienie ich podſtáw:

165. *Twierdz:* 4. Powierzchnie całe Walców proſtych podobnych, maią się do ſiebie, iak kwadraty ich *Wymiarów* (Dimensio) odpowiadaiących sobie; toiest: iak kwadraty promieni ich podstáw, albo iak ich wysokości.

Powierzchniá cała każdego z tych Walców równá się Proſtokątowi z okręgu podſtawy iego, i z ſummy wysokości iego, i promienia podſtawy; więc powierzchnie te, tak się mieć do siebie będą, iak Proſtokąty z promieni ich podſtáw, i z summy tychże promieni i wysokości Walców. A że Promienie podstáw, są do siebie (dla podobień-

bieństwa Walców) iak ich wysokości; więc i summa z tych promieni iest do summy z tych wysokości, w tym stósunku, w którym są te promienie. Prostokąty więc, w których stósunku maią się do siebie powierzchnie te Walców, są podobne, a przeto tak się będą do siebie miały, iak kwadraty ich boków, odpowiadaiących sobie, n p. iak kwadraty promieni ich podstáw. Będą więc do siebie i powierzchnie całe Walców w tymże samym stósunku; toiest, iak kwadraty promieni, ich podstáw.

Toż mówić i o samych powierzchniach krzywych w Walcach; wyłączaiąc z nich podstawy.

166. *Twierdz.* 5. Bryłowatości Walców podobnych, tak się maią do siebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadaiących sobie; albo są do siebie w stósunku tróymnożnym tychże wymiarów, n p. w stósunku tróymnożnym promieni, ich podstáw.

Dowodz: Opiszmy na podstawach, tych Walców, iakiekolwiek Wielokąty forémne, podobne: niech te Wielokąty będą podstawami Graniastosłupów, téyże z Walcami wysokości. Te Graniastosłupy będą podobne, a zatem będą się miały do siebie w stósunku tróymnożnym, n. p. promieni ich podstáw.

Wal-

Walce tak się do siebie maią, iak Graniastosłupy na nich opisané. Jakoż każdy Walec iest do Graniastosłupa na nim opisanégo, w stósunku podstawy tego Walca do podstawy Graniastosłupa. A że podobné są dwa Wielokąty na podstawach Walców opisané; więc ténże sam stósunek będzie każdégo Walca do Graniastosłupa na nim opisanégo: a zatém tak się mieć będzie ieden Walec, do Graniastosłupa na nim opisanégo, iak i Walec drugi do Graniastosłupa na nim także opisanégo: tak więc piérwszy Walec będzie się miał do drugiégo, iak i piérwszy Graniastosłup do drugiégo.

A że stósunek tych Graniastosłupów równá się stósunkowi tróymnożnému promiéni podstáw Walców, na których są té Graniastosłupy opisané; więc i stósunek tych Walców równać się także będzie stósunkowi tróymnożnému promiéni tychże podstáw.

167. Możná obiaśnić przykładami liczebnémi to Twiérdzénié: má zaś bydź naprzód przystósowané do samych Walców prostych, skąd łatwo wnieść będzie możná, że i w ukośnych Walcach, tén sám stósunek má mieyscé; ponieważ Walce ukośné, równéy podstawy i wysokości z Walcami prostémi, byłyby im równé, a zatém byłyby téż do siebie w stósunku tróymnożnym promiéni podstáw swoich.

168. *Defin.* Ostrokręgi prosté nazywaią się *podobnémi*, gdy tak się maią do siebie ich wysokości, iak i promiénie ich podstáw. Przecięciá przechodzącé przez oś tych Ostrokręgów są podobné: a zatém podobné są Tróykąty, tworzącé obrotém swoim té Ostrokręgi.

Co zaś do Oſtrokręgów ukośnych: tych nie tylko wysokości tak się mieć do siebie powinny, iak promiénie ich podstáw; ale nadto i osi ich w tymże samym do siebie są stósunku, a zatém iednakowo bydź nachyloné powinny do płaſzczyzn podstáw.

169. *Twiérdz: 6.* Powiérzchnie całé Ostrokręgów prostych, są do siebie w stósunku dwumnożnym promiéni podstáw, albo w stósunku dwumnożnym boków tychże Ostrokręgów.

Dowodzénié tego, może bydź podobné do dowodzéniá Twiérdzéniá 4.

Może téż bydź i w ſposób następuiący, który także ſłużyćby mógł równie i do Walców.

W jednym którymkolwiek Ostrokręgu prostym, powiérzchniá krzywá, tak się má do powiérzchni podstawy, iak bok Ostrokręgu prostégo, do promiénia téy podstawy. A że i w drugim Ostrokręgu podobnym piérwſzému, ténże sám

stósunek má mieyſce; więc powierzchniá krzywá iednego Ostrokręgu, tak się má do powierzchni podstawy iego, iak powierzchniá krzywá drugiego Ostrokręgu podobnego, do powierzchni iego podstawy: więc i ſumma z powierzchni krzywey i z powierzchni podstawy iednego Ostrokręgu, toiest cała iego powierzchniá tak się má do powierzchni podstawy iego, iak cała powierzchniá drugiego Ostrokręgu, do powierzchni iego podstawy: a zatem cała powierzchniá pierwſzego Ostrokręgu, tak się má do całey powierzchni drugiego, iak powierzchnia podstawy pierwszego Ostrokręgu, do powierzchni podstawy drugiego: albo iak kwadrat promienia pierwſzey podstawy, do kwadratu promienia drugiey.

Podobnie dowieśdź można, że i powierzchnie krzywe Ostrokręgów prostych podobnych, są w stósunku dwumnożnym promieni podstáw, lub boków albo inſzych wymiarów odpowiadaiących sobie.

170. *Twierdz:* 7. Bryłowatości Oſtrogręgów podobnych, maią się do siebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadaiących sobie, toieſt: iak Sześciany promieni ich podſtáw, albo iak Sześciany ich boków, i t. d.

Twier-

Twierdzénié to podobnie się dowodzi, iak i poprzedzaiącé względém bryłowatości Walców ; kładąc zamiáſt Graniastosłupów na Walcach opisanych, Oſtrograny opisané na Oſtrokręgach.

171. *Uwága.* Wſzyſtko to, cokolwiek się powiedziało o ſtósunku bryłowatości Równoległościanów, Graniaſtosłupów, Oſtrogranów, i Oſtrokręgów podobnych, na to wypádá, że :

W ogólności mówiąc, té Bryły ſą w ſtóſunku złożonym z ſtóſunku ich podſtáw, i z ſtósunku ich wyſokości.

Że zaś, gdy té Bryły ſą podobné, ſtóſunek ich podſtáw, ieſt dwumnożnym ſtóſunku ich wyſokości ; więc ſtóſunek złożony z ſtóſunku ich podſtáw, i z ſtóſunku ich wyſokości, ſkłádá się z ſtóſunku dwumnożnégo, i z ſtóſunku poiedyńczégo ich wyſokości : będzie tedy taki ſtóſunek tróymnożnym ſtóſunku ich wyſokości. A że ſtóſunek ich wyſokości równá się ſtóſunkowi ich boków którychkolwiek odpowiadaiących ſobie ; więc ſtóſunek tych Brył, gdy do siebie ſą podobné, ieſt téż ſtóſunkiém tróymnożnym boków ich którychkolwiek odpowiadaiących ſobie.

172. *Twiérdz:* 8. Powiérzchnie kul, ſą do siebie w ſtóſunku dwumnożnym

ich promiéni, albo iak kwadraty ich promiéni. Bryłowatości zaś kul, są do siebie w ftósunku tróymnożnym ich promiéni, albo iak sześciany tychże promiéni.

Dowodz: Powiérzchnie kul, są czteéry razy większé, niżeli powiérzchnie ich kół wielkich: a zatém, tak się do siebie maią, iak powiérzchnie tychże kół, toieft: iak kwadraty ich promiéni.

Bryłowatości kul, są $\frac{2}{3}$ Walców na nich opifanych; więc tak się maią do siebie, iak bryłowatości tych Walców, toieft, iak fześciany ich promiéni.

173. *Uwaga.* Widzieliśmy w fzczególności, iż powiérzchniá kuli, ieft do powiérzchni kwadratu iéy śrzednicy, w ftósunku okręgu koła do iego śrzednicy, i tén ftósunek ieft zawfze iednakowy. Jeft téż, bryłowatość kuli, do bryłowatości fześcianu iéy śrzednicy, iak okrąg koła do śrzednicy iego, 6 razy wziętéy; który także ftósunek nigdy się nie odmiéniá.

Kule więc zachowuią właśności Brył podobnych, tak w ftósunku ich powiérzchni, iako i w ftósunku ich bryłowatości. Jakoż, są one w faméy rzeczy Bryłami podobnémi; śrzodek iednéy kuli

podo-

podobnie iest położony, iak i śrzodek inszéy iakiéykolwiek kuli: tak iedna iak i drugá, tworzy się obrotém półkola, a te półkola są do siebie podóbné.

Możnáby więc (z niewielką odmianą) to im przystósować, co się powiedziało o Bryłach podobnych, zakończonych powiérzchniami płaskiémi, względém punktów podobnie położonych w tychże bryłach.

174. *Defin*: Wycinki podobné kul, są té, których kąty w śrzodku, są równé, albo które obrotém podobnych wycinków kół tworzą się.

Odcinki kul, podobné, są té, których promiénie podstáw, tak się do siebie maią, iak ich wysokości, albo iak promiénie kul, do których należą; albo na koniec są té, które się tworzą podobnych połodcinków kół obrotém.

175. *Twiérdz*: 9. Powiérzchnie kuliste, i powiérzchnie całé, tak wycinków, iak i odcinków podobnych w kulach, są do siebie w stósunku dwumnożnym promiéni kul, do których należą.

Táb. VI. *Fig.* 4.

Dowodz: Niech będą: ACB, acb, dwa wycinki kół podobné, które obrotém swoim, około promiéni: AC, ac, tworzą podobné kul wycinki.

Na-

Naprzód. Powiérzchnie kuliste utworzoné przez łuki: AB: ab, równać się będą powiérzchniom kół maiących za promiénie, linie: AB, ab; więc tak się mieć będą do siebie, iak kwadraty tych liniy: AB, ab, albo iak kwadraty promiéni: AC, ac.

Powtóré. Powiérzchnie Ostrokręgowé utworzoné obrotém promiéni: CB, bc, maią się téż do siebie, iak kwadraty promiéni: CB, cb, albo CA, ca; więc i powiérzchnie całé wycinków podobnych tak się do siebie maią, iak kwadraty promiéni CA, ca.

Koła wykréslone promiéniami BD, bd, i służącé za podstawy odcinkóm kul, utworzonym przez obrót półodcinków kół; ABD, abd, są także do siebie, iak kwadraty liniy BD, bd: a zatém iak kwadraty promiéni: CB, cb, albo CA, ca.

176. *Twiérdz:* 10. Bryłowatości tak wycinków, iak i odcinków podobnych, w kulach, są do siebie w stósunku tróymnożnym promiéni kul, do których należą.

Dowodz: Naprzód: Wycinek kuli, utworzony przez wycinek ACB, koła, tak się má do swoiéy kuli, iak kwadrat linii AB, do kwadratu śrzednicy AE, albo iak kwadrat linii ab, do kwadratu

śrze-

średnicy ae; toieſt: iak wycinek kuli, utworzony przez wycinek: acb, koła, do kuli ſwoiéy. Więc ténże ſám ieſt ſtóſunek iednégo z tych wycinka do ſwoiéy kuli, co i drugiégo wycinka do ſwoiéy także kuli: a zatém té wycinki, tak się do siebie maią, iak i kule, do których należą. A że ſtóſunek tych kul, ieſt ſtóſunkiém tróymnożnym ich promiéni; więc i ſtóſunek tych wycinków ieſt także ſtóſunkiém tróymnożnym tychże promiéni.

Powtóré. Oſtrokręgi podobné utworzoné obrotém Tróykatów, CBD, cbd, ſą do siebie w ſtóſunku tróymnożnym promiéni CB, cb; więc tak téż maią się do siebie, iak i wycinki kul utworzoné obrotém wycinków ACB, acb, do kół należących; a zatém i różnice każdégo wycinka kuli, od każdégo Oſtrokręgu, toieſt odcinki kul, utworzoné przez połodcinki kół, ABD, abd, ſą do siebie w ſtóſunku równym ſtóſunkowi wycinków kul, toieſt w ſtóſunku tróymnożnym promiéni CB, cb.

177. *Twiérdz:* 11. Gdy cztéry iakié liniie czynią proporcyą, i gdy dwa piérwszé wyrazy téy proporcyi, ſą liniiami odpowiadaiącémi ſobie, czyli podobnie położonémi, w dwóch Bryłach podobnych: a dwa oſtatnié wyrazy téyże proporcyi, ſą liniiami odpowiadaiącémi

ſobie,

ſobie, w dwóch inſzych Bryłach podobnych; ſtóſunek dwóch piérwſzych Brył, będzie równy ſtóſunkowi dwóch Brył drugich.

Dowodz: Gdyby té cztéry liniie były bokami cztérech ſześcianów, té cztéry Sześciany czyniłyby proporcyą: a że ſtóſunek dwóch piérwſzych Brył, równá się ſtóſunkowi dwóch piérwſzych Sześcianów, a ſtóſunek dwóch drugich Brył, równá się ſtóſunkowi dwóch drugich Sześcianów; więc i ſtóſunek dwóch piérwſzych Brył, równá się ſtóſunkowi dwóch Brył drugich.

178. *Uwága.* Bryłowatości Brył podobnych, prędzéy roſną, niż ich powiérzchnie.

Przykłád. Niech będą liniie odpowiadaiącé ſobie w dwóch Bryłach podobnych, dwa razy więkſzé iedné względém drugich; powiérzchniá iednéy z tych Brył, będzie cztéry razy większá od powiérzchni drugiéy Bryły; a zaś Bryłowatość iednéy Bryły, będzie ośm razy większá od bryłowatości, drugiéy Bryły.

Táb. VI. *Fig.* 5. W ogólności zaś mówiąc, niech będą AB, AC, liniiami odpowiadaiącémi sobie, w dwóch Bryłach podobnych. Zróbmy Tróykąt prostokątny maiący liniią AB,

za

za iedno ramię kąta prostego, a liniią AC, za przeciwprostkątną.

Pociągniymy CD prostopadłą do AC, i natráfiaiącą na liniią AB przedłużoną, w punkcie D. Od tego punktu D, wyprowádźmy DE prostopadłą do AD, i natráfiaiącą na liniią AC przedłużoną w punkcie E.

Powierzchnie dwóch Brył podobnych którėby miały AB, i AC za liniie odpowiadaiące sobie, maią się tak do siebie, iak liniie AB, i AD: a bryłowatości ich, są w tym samym stósunku, w którym liniie AB, i AE.

A że liniiá AE, wikszá iest względem linii AB, niżeli liniiá AD; więc też i bryłowatość drugiey Bryły większá iest względem bryłowatości pierwszey Bryły, niżeli powierzchniá tey drugiey Bryły, względem powierzchni pierwszey Bryły; toiest: bryłowatość drugiey Bryły prędzey się powiększá, niżeli iey powierzchniá.

179. *Uwága.* Na poprzedzaiących Twierdzeniach zasádzá się podziáł *Linii Bryl* (Linea Solidorum) który znáyduiémy na cyrklu proporcyonalnym.

Ta liniiá zawierá w sobie zwyczaynie 64 podziáłów, które się rachować

zaczy-

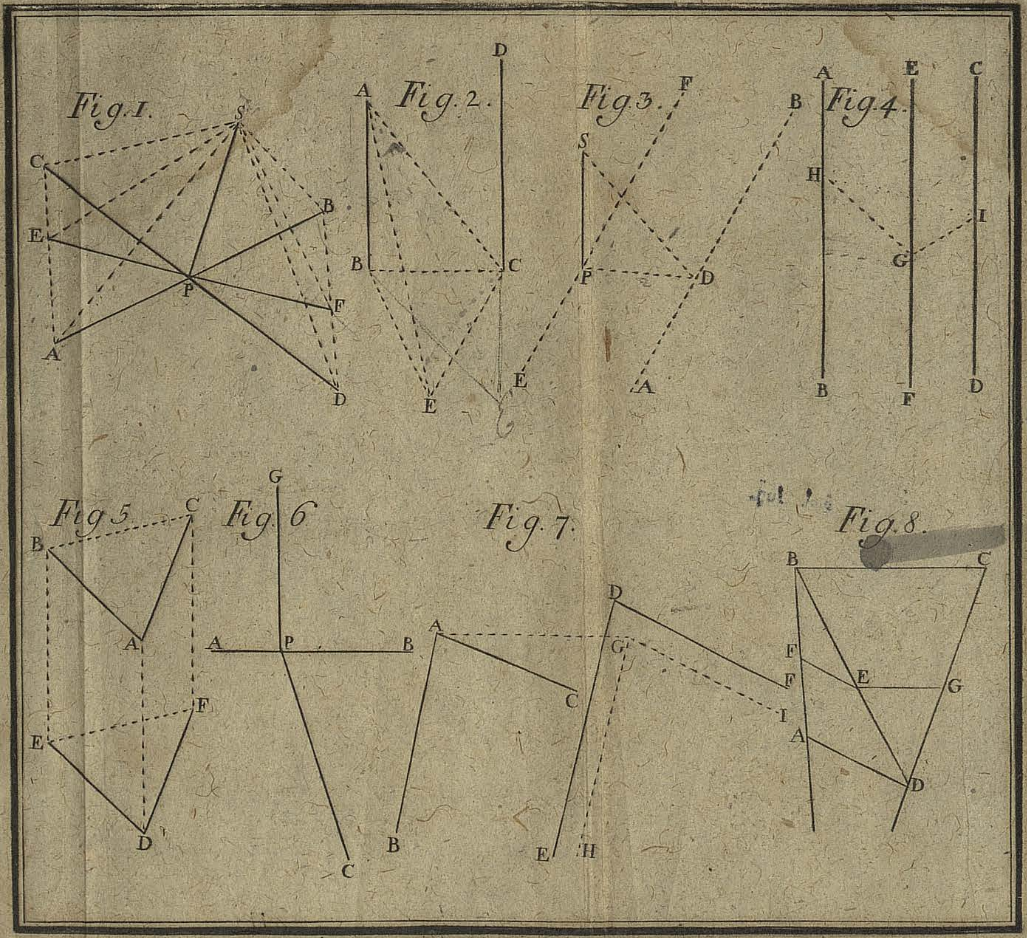
zaczynaią od *śrzodka* narzędziá (a centro).

Odległości tego śrzodka od punktów naznaczonych liczbami: 1, 8, 27, 64, tak się maią do siebie, iak
liczby - - 1, 2, 3, 4;
co znaczy, że Bryły podobné, których boki są w stósunku liczb: 1, 2, 3, 4, maią bryłowatości w stósunku liczb: 1, 8, 27, 64.

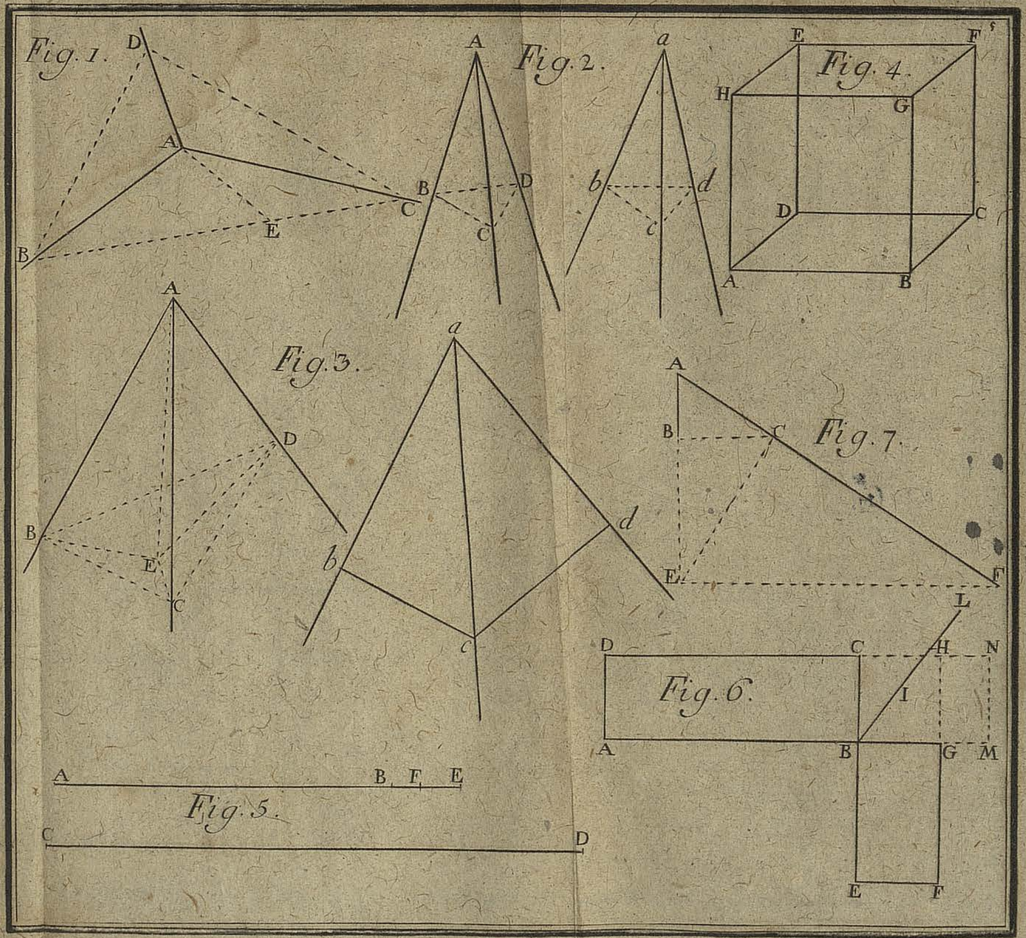
Jnszé podziáły wyznaczoné są przez wyciągnięnié przybliżoné pierwiástków sześciénnych. J tak, ponieważ boki dwóch Sześcianów, z których ieden dwa razy ieſt większy od drugiégo, tak się blizko maią do siebie, iak liczby 126 i 100; więc téż i odległości śrzodka, od punktów naznaczonych na téy linii liczbami: 1, 2, tak się maią do siebie, iak liczby: 100, i 126. Używanié dwóch takich liniy, znáyduiących się na dwóch ramionach cyrkla proporcyonalnégo, podobné ieſt używaniu inszych liniy tamże się znáyduiących, które w osobnym na to Rozdziele iuż się wyłożyło, w Części I.

K O N I E C.

Tab. I.

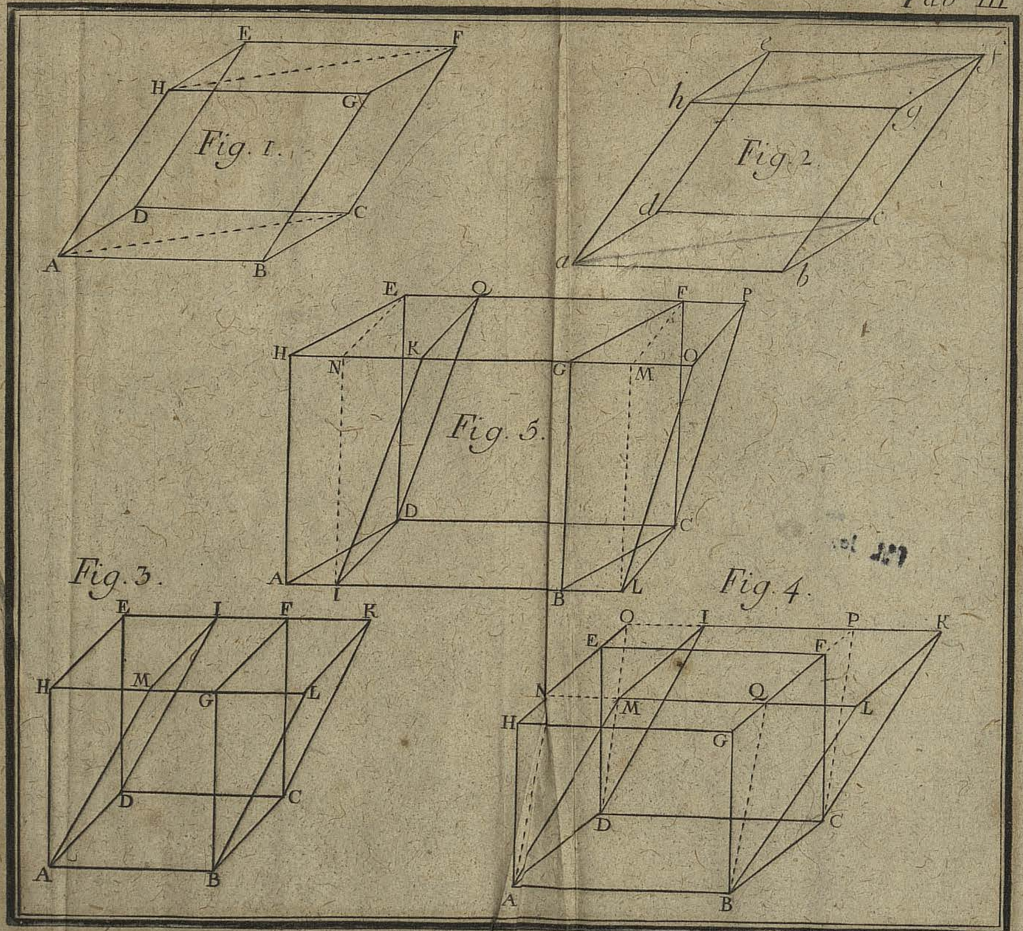


Tab. II.

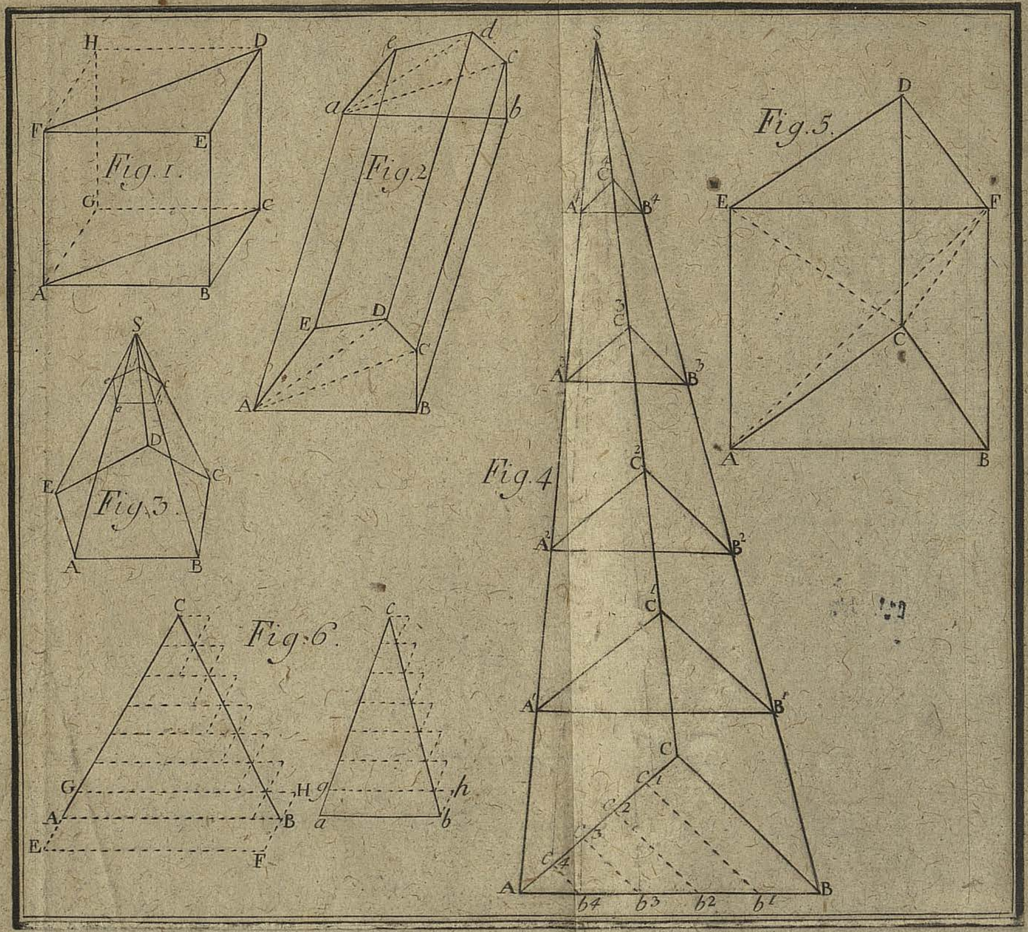


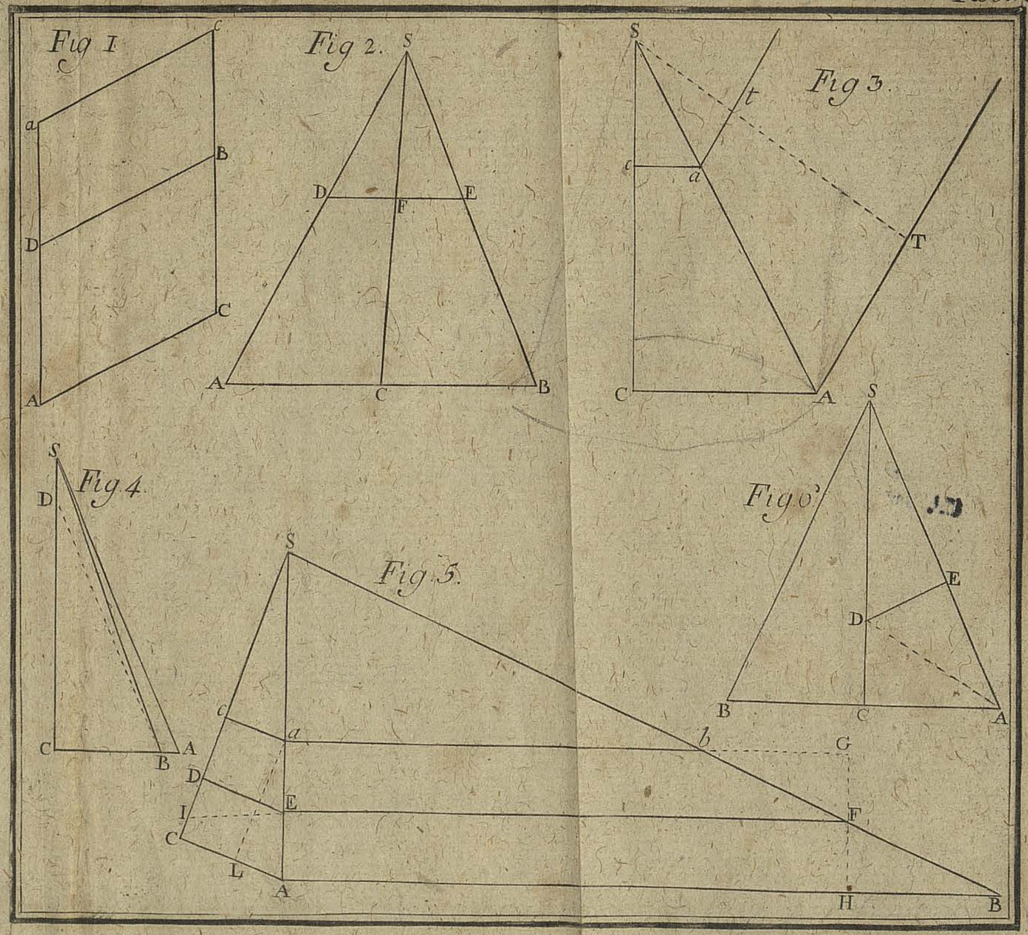
Diat. Jag.

Tab III

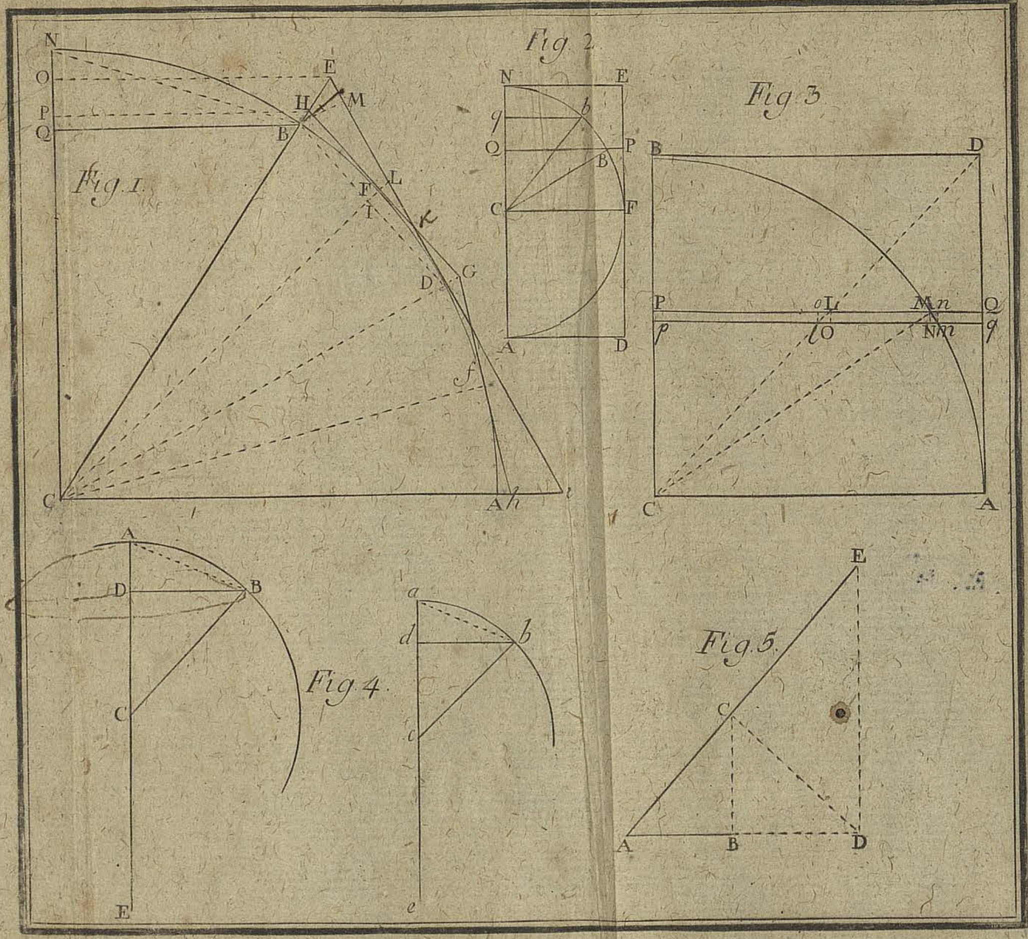


Tab IV.




Fig 1.
Fig 2.
Fig 3.
Fig 4.
Fig 5.
Fig 6.

Tab. VI



ltra & Bona minutiora Nobilibus Livoniæ ...
lioris conditionis hominibus, emeritis tamen gentis Polonæ vel Lithuanæ, aut Ducatûs Livoniæ in usumfructum advitalem, conferri jubentur, prout & conferuntur; quæ Bona alio nomine vocantur, *Panis bene-* ... uare IOANNES ALBERTUS *Petricov. A.* 1496. confir... a CASIMIRI III. non immeritò inquit: *Favor & beni-* ... *is in suos ostensa subjectos, sic commodari exhiberiq; conspici-* ... *necessitas, honestas ac eventuum communium jus creditur* ... *in futurum exposcere.* Herburt. *v. Thronus Regius.* Quid ... d munificum & liberalem esse, quàm imitari DEUM? ut ... m ille erga nos liberalis est, ita nos quoq; erga alios ... *. ubi supra pag.* 62.

... *ualitas*, ut sit VNVS: Cùm sub uno Principe & capite ca... a diversa habere non debeat, ne sit tanquam monstrum diversa habens capita. Expedit enim Reipublicæ, ut uno & æquali jure tam Cracovienses, quàm etiam Majoris Poloniæ inhabitatores & cæteræ Regni nostri Terræ utantur & judicentur. *Casimirus Vislic. A.* 1368.

quem